

BULLETIN DES SÉANCES

DE LA

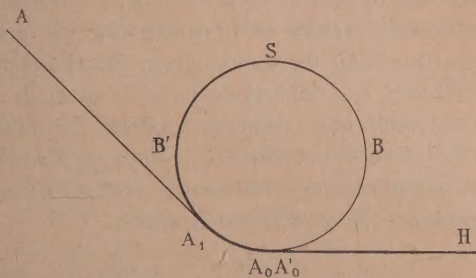
SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE NANCY

*Séance du 19 juin 1903.***Sur le « looping the loop », par M. G. FLOQUET.**

Dans ce travail, je considère une piste fixe, dont je néglige les dimensions latérales et que je regarde comme comprise tout entière dans un même plan vertical. Cette piste affecte la forme d'une boucle composée et orientée de la manière suivante :

1^o une partie circulaire $A_0BSB'A'_0$;
 2^o une partie rectiligne A'_0H , qui prolonge, suivant la tangente au point le plus bas A'_0 , le quadrant $B'A'_0$ de la circonférence précédente ; 3^o un arc A_0A_1 , moindre que 90° , de cette circonférence et qui en prolonge au point le plus bas A_0 le quadrant BA_0 ; 4^o une partie rectiligne A_1A prolongeant l'arc précédent A_0A_1 suivant la tangente à son extrémité A_1 . La ligne mixte $AA_1 + A_1A_0 + A_0BSB'A'_0 + A'_0H$, qui en réalité est gauche, et dont les diverses parties se raccordent à leurs points de jonction, constitue la boucle en question.

Si une bicyclette et son cavalier, placés d'abord en A sur la piste, étaient abandonnés à eux-mêmes sans vitesse, ils pren-



draient un mouvement qu'il est facile d'étudier sous certaines conditions. C'est ce que je ferai dans un travail prochain. Je me borne actuellement à considérer le cas d'un disque homogène. Un tel disque, placé en A, étant abandonné à lui-même, je me propose de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il *boucle la boucle* en roulant constamment, sans jamais glisser; je chercherai en outre quelles sont, lorsque ces conditions sont réalisées, les principales circonstances du mouvement.

Le coefficient de frottement de glissement du disque sur la piste sera désigné par f . Je ferai abstraction de la résistance au roulement, qui est ici négligeable. Mais, pour rendre notre cas plus comparable à celui d'une bicyclette avec son cavalier, qui ont à subir la résistance de l'air, je supposerai qu'au centre du disque, en sens contraire de sa vitesse, est appliquée une force KV^2 proportionnelle au carré de cette vitesse. On sait en effet que, dans l'air calme, la résistance éprouvée par un cycliste et sa machine est de cette forme, K étant un coefficient variable avec la taille du cycliste, avec sa position et la forme de ses vêtements¹. Les expériences de M. Guye, puis celles de M. Bourlet ont montré que K est égal, en moyenne, à 0,06 S, S étant la surface offerte par le cycliste à l'air, c'est-à-dire la surface de la projection du cycliste et de sa machine sur un plan perpendiculaire à la direction du mouvement. M. Bourlet a de plus mesuré la surface S, qui dépend de la taille et de la position du cavalier : il a trouvé que, pour un cycliste de taille moyenne, S est de 0^m2,8, de 0^m2,6 ou de 0^m2,4, selon qu'il se tient absolument droit, un peu penché ou très courbé sur le guidon. Les valeurs correspondantes du coefficient K sont :

$$0,048, \quad 0,036, \quad 0,024.$$

J'adopterai la valeur 0,04 et je poserai :

$$K = \frac{\lambda}{g^2},$$

g désignant l'accélération due à la pesanteur ou 9^m,81 par seconde; d'où :

$$\lambda = 0,04 \times (9,81)^2 = 3,85.$$

1. BOURLET, *Nouveau traité des bicycles et bicyclettes. Le travail.*

Dans une première partie, je traite la question au point de vue théorique, quelle que soit la grandeur de λ , sans profiter en aucune façon de ce que K est relativement petit. Une deuxième partie est consacrée à une application numérique, où j'attribue à λ la valeur numérique que je viens d'indiquer.

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE

1. Je désignerai par R le rayon de la circonférence $A_0BSB'A'_0$, par i l'angle au centre de l'arc A_1A_0 , angle qui mesure l'inclinaison de la droite AA_1 sur l'horizon; enfin D représentera la longueur AA_1 .

J'appellerai p le poids du disque homogène, r son rayon, k son rayon de gyration par rapport à son centre, auquel cas k^2 est égal à $\frac{r^2}{2}$.

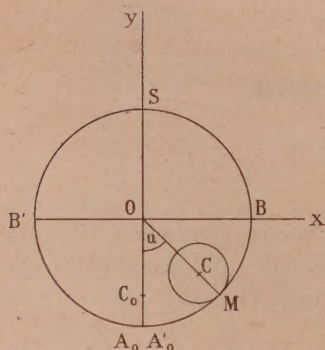
Les forces qui sollicitent le disque regardé comme libre sont le poids p et la résistance $\frac{\lambda}{g^2} V^2$ appliqués à son centre, puis les deux réactions de la piste appliquées au point M de contact. N désignera la réaction normale, estimée positivement vers le centre C du disque, et T la réaction tangentielle, estimée positivement dans le sens $AA_1A_0BSB'A'_0H$. V représente d'ailleurs la vitesse du centre du disque comptée positivement dans ce dernier sens, de sorte que, quand il roule sans glisser, sa vitesse angulaire ω est égale à $-\frac{V}{r}$, en grandeur et en signe. J'appellerai V_1 , V_0 , V'_0 les valeurs que prend V lorsque le disque vient toucher la piste en A_1 , en A_0 et en A'_0 .

Quand le disque roulera, un seul paramètre définira sa position.

Je vais l'examiner successivement sur les différentes parties de la piste: je rapprocherai ensuite les résultats. Je m'occuperai enfin du temps que met le disque à boucler la boucle.

I.

2. Je considère ici la circonférence $A_0BSB'A'_0$, sur laquelle le disque arrive avec la vitesse V_0 pour son centre. Mais je suppose qu'il ne peut que rouler sur elle et, de plus, qu'il ne peut la quitter, la liaison étant bilatérale. C'est



dans ces hypothèses que je vais chercher quel doit être V_0 pour que le disque fasse au moins une fois le tour de la circonférence et étudier, dans ce cas, les variations de la vitesse V et des deux réactions N et T .

Soient ox , oy deux diamètres rectangulaires, ox parallèle à V_0 et de même sens, oy vertical ascendant. Prenons comme paramètre définissant la position du disque

l'angle u que fait le rayon OC mené vers son centre avec le rayon vertical descendant OA_0 , cet angle étant compté à partir de OA_0 positivement vers ox .

L'équation des forces vives donne la vitesse V en fonction de u . Effectivement, le travail élémentaire du poids est $-p(R-r)\sin u\,du$, et celui de la résistance est $\mp \frac{\lambda}{g^2}(R-r)V^2\,du$, en prenant le signe $-$ ou le signe $+$, selon que le centre C marche dans le sens des u croissants ou des u décroissants. Les travaux des deux réactions N et T sont d'ailleurs nuls. Quant à la force vive du disque, elle est $\frac{p}{g}V^2 + \frac{p}{g}k^2\frac{V^2}{r^2}$, c'est-à-dire $\frac{3}{2}\frac{p}{g}V^2$. D'où l'équation des forces vives qui, en posant :

$$(1) \quad \frac{2(R-r)}{3pg} = n,$$

s'écrit :

$$(2) \quad \frac{d(V^2)}{du} + 2n\lambda V^2 = -2npg^2 \sin u,$$

pour le cas où le disque marche dans le sens des u croissants. Comme c'est ce qui a lieu au début, l'équation (2) convient tant

que le disque ne rétrograde pas. S'il y avait rétrogradation, il faudrait changer λ en $-\lambda$ dans l'équation. Son intégrale générale est :

$$V^2 = C e^{-2n\lambda u} + \frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (\cos u - 2n\lambda \sin u),$$

C étant une constante qui se détermine en écrivant que, pour $u = 0$, V^2 est égal à V_0^2 . Si l'on pose

$$\frac{4n^2\lambda^2 + 1}{2npg^2} C = m,$$

auquel cas on a

$$(3) \quad m = \frac{4n^2\lambda^2 + 1}{2npg^2} V_0^2 - 1,$$

il vient

$$(4) \quad V^2 = \frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (m e^{-2n\lambda u} + \cos u - 2n\lambda \sin u),$$

où m a une valeur (3) supérieure à -1 et qui convient tant que le disque ne rétrograde pas.

Ayant V^2 en fonction de u , les deux équations du mouvement du centre de gravité vont donner les réactions N et T. Écrivons-les sous leur forme intrinsèque

$$\begin{aligned} \frac{p V^2}{g(R-r)} &= N - p \cos u, \\ \frac{p}{g} \frac{dv}{dt} &= T - p \sin u - \frac{\lambda}{g^2} V^2. \end{aligned}$$

En tenant compte de (1), la première s'écrit

$$(5) \quad N = p \cos u + \frac{2 V^2}{3ng^2}.$$

Quant à la seconde, on peut l'écrire

$$\frac{p}{g} \frac{dv}{du} \frac{du}{dt} = T - p \sin u - \frac{\lambda}{g^2} V^2,$$

ou, en tenant compte de

$$V = (R-r) \frac{du}{dt}$$

et de la formule (1)

$$\frac{1}{3ng^2} \frac{d(V^2)}{du} = T - p \sin u - \frac{\lambda}{g^2} V^2,$$

ou encore, à cause de (2),

$$(6) \quad T = -\frac{1}{6ng^2} \frac{d(V^2)}{du} = \frac{p}{3} \sin u + u \frac{\lambda V^2}{3g^2}.$$

Remarquons que la première égalité (6) s'obtient immédiatement par l'application du théorème des moments des quantités de mouvement relativement à des axes parallèles à ox et oy menés par le centre de gravité C. En lui adjoignant les deux équations du mouvement du point C, on retombe finalement sur les mêmes équations (2), (5) et (6).

Remarquons aussi que les équations qui conviennent au mouvement rétrograde du disque se déduisent des précédentes en y changeant λ en $-\lambda$ et T en $-T$.

Les réactions N et T sont donc données par (5) et (6), ou encore, en remplaçant V^2 par sa valeur (4),

$$(7) N = \frac{4p}{3(4n^2\lambda^2 + 1)} \left(me^{-2n\lambda u} + \frac{12n^2\lambda^2 + 7}{4} \cos u - 2n\lambda \sin u \right),$$

$$(8) T = \frac{p}{3(4n^2\lambda^2 + 1)} (2n\lambda me^{-2n\lambda u} + 2n\lambda \cos u + \sin u).$$

3. Avec les liaisons que nous supposons actuellement, l'étude de la seule vitesse suffit pour obtenir la condition que doit remplir V_0 pour que le disque fasse une fois le tour complet de la circonférence.

Posons

$$\varphi(u) = me^{-2n\lambda u} + \cos u - 2n\lambda \sin u,$$

auquel cas la formule (4) donne

$$V^2 = \frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} \varphi(u).$$

Remarquons d'abord que les valeurs de u qui annulent à la fois $\varphi(u)$ et sa dérivée $\varphi'(u)$ annulent aussi $\sin u$, car les équations simultanées

$$\begin{aligned} me^{-2n\lambda u} + \cos u - 2n\lambda \sin u &= 0, \\ -2n\lambda me^{-2n\lambda u} - \sin u - 2n\lambda \cos u &= 0, \end{aligned}$$

donnent $\sin u = 0$. Cela posé, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= m + 1 > 0, \\ \varphi(\pi) &= e^{-2n\lambda\pi} (m - e^{2n\lambda\pi}).\end{aligned}$$

Soit alors $m < e^{2n\lambda\pi}$: $\varphi(0)$ et $\varphi(\pi)$ étant de signes contraires, la fonction continue $\varphi(u)$ s'annule pour un nombre impair de valeurs de u comprises entre 0 et π et, si u_1 est la plus petite, u atteint u_1 au bout du temps

$$t = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{(4n^2\lambda^2 + 1)np}{2}} \int_0^{u_1} \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}},$$

temps fini, puisque $\sin u_1$ n'étant pas nul, u_1 n'annule pas $\varphi'(u)$ et est par conséquent racine simple de $\varphi(u)$; le disque rétrogradera donc avant d'avoir atteint le sommet S de la circonférence.

Soit maintenant $m = e^{2n\lambda\pi}$, auquel cas $\varphi(\pi)$ est nul. L'expression de $\varphi'(u)$:

$$\varphi'(u) = -2n\lambda e^{2n\lambda(\pi-u)} - \sin u - 2n\lambda \cos u$$

montre que $\varphi'(u)$ est constamment négatif dans l'intervalle $(0, \pi)$, sauf pour $u = \pi$, où $\varphi'(u)$ est nul. Donc $\varphi(u)$ décroît sans cesse depuis $e^{2n\lambda\pi} + 1$ jusqu'à zéro. Mais le disque n'atteint jamais le point S, car π est racine double de $\varphi(u)$, de sorte que le temps est infini.

Soit enfin $m > e^{2n\lambda\pi}$, ce que j'écrirai $m = e^{2n\lambda\pi + \nu}$, ν étant positif. On a ici :

$$\varphi'(u) = -2n\lambda e^{2n\lambda(\pi-u) + \nu} - \sin u - 2n\lambda \cos u,$$

qui montre que $\varphi'(u)$ est constamment négatif dans l'intervalle $(0, \pi)$. Donc $\varphi(u)$ y décroît sans cesse depuis la valeur $m + 1$ jusqu'à une valeur $\varphi(\pi)$ positive et le disque franchira le point S.

Il résulte de là que, pour que le disque franchisse le sommet S, il faut et il suffit que l'on ait :

$$(9) \quad m > e^{2n\lambda\pi},$$

c'est-à-dire, d'après (3) :

$$(10) \quad V_0^2 > \frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (1 + e^{2n\lambda\pi}).$$

Or, une fois franchi le point S, la vitesse V ne peut plus s'annuler et le disque achève nécessairement le tour de la circonférence. Nous avons donc là la condition cherchée, nécessaire et suffisante pour que le disque exécute une fois le tour du cercle.

4. En supposant remplie la condition précédente, on peut poursuivre l'étude de la vitesse sur la seconde moitié de la circonférence, vitesse qui décroît constamment sur la première. En raisonnant comme on va le faire plus loin, dans le cas moins simple où il s'agit de la réaction normale, on arrive sans peine aux conclusions suivantes :

Lorsqu'on a $e^{2n\lambda\pi} < m < \frac{e^{3n\lambda\pi}}{2n\lambda}$, la vitesse continue à décroître au delà du sommet S jusqu'en un point $u = \alpha_0$ intérieur au troisième quadrant où elle est minimum ; puis elle croît jusqu'en un point $u = \beta_0$ intérieur au quatrième quadrant où elle est maximum ; enfin, elle décroît jusqu'au point A'_0 .

Lorsqu'on a $m = \frac{e^{3n\lambda\pi}}{2n\lambda}$, les deux points α_0 et β_0 de minimum et de maximum sont confondus avec le point B', de sorte que la vitesse diminue pendant toute la durée de la révolution du disque autour du point O.

Si u désigne la valeur de u qui produit le minimum ou le maximum, dans les deux cas précédents, comme elle annule $\varphi'(u)$, on en conclut pour le minimum ou le maximum de V^2

$$V^2 = -\frac{pg^2}{\lambda} \sin u.$$

Lorsqu'enfin on a $m > \frac{e^{3n\lambda\pi}}{2n\lambda}$, les points de minimum et de maximum n'existent plus et, comme dans le cas précédent, la vitesse est sans cesse décroissante.

5. Admettant toujours que la condition (9) ou (10) est satisfaite, je vais étudier maintenant la réaction normale N aux divers points de la circonférence, réaction qui est positive au départ du disque en A_0 . Je l'étudierai successivement sur chacun des quatre quadrants A_0B , BS, SB' et B'A', puis je rapprocherai les résultats.

J'appellerai μ le nombre

$$\frac{12n^2\lambda^2 + 7}{4},$$

qui est supérieur à l'unité, et je pose :

$$\psi(u) = me^{-2n\lambda u} + \mu \cos u - 2n\lambda \sin u,$$

de sorte que l'on a, d'après (7) :

$$N = \frac{4p}{3(4n^2\lambda^2 + 1)} \psi(u).$$

Il vient aussi :

$$\psi'(u) = -2n\lambda me^{-2n\lambda u} - \mu \sin u - 2n\lambda \cos u,$$

que j'écrirai :

$$\psi'(u) = -e^{-2n\lambda u} \psi_1(u),$$

en posant :

$$\psi_1(u) = 2n\lambda m + (\mu \sin u + 2n\lambda \cos u) e^{2n\lambda u}.$$

Pour u fini, $\psi'(u)$ et $\psi_1(u)$ sont de signes contraires et s'annulent en même temps. On a d'ailleurs :

$$\psi_1'(u) = [2n\lambda(\mu - 1) \sin u + (4n^2\lambda^2 + \mu) \cos u] e^{2n\lambda u},$$

ou, en remplaçant μ par sa valeur,

$$\psi_1'(u) = \frac{4n^2\lambda^2 + 1}{4} (6n\lambda \sin u + 7 \cos u) e^{2n\lambda u}.$$

J'écris encore les valeurs de $\psi_1(\pi)$, $\psi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ et $\psi_1(2\pi)$, qui vont être utiles :

$$\psi_1(\pi) = 2n\lambda (m - e^{2n\lambda\pi}) > 0,$$

$$\psi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2n\lambda \left(m - \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}\right),$$

$$\psi_1(2\pi) = 2n\lambda (m + e^{4n\lambda\pi}) > 0,$$

et, à ce propos, je remarque les inégalités

$$(11) \quad e^{2n\lambda\pi} < \mu e^{2n\lambda\pi} < \frac{1}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi} < \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi} < \frac{1}{4n^2\lambda^2} e^{4n\lambda\pi} < \frac{\mu}{4n^2\lambda^2} e^{4n\lambda\pi},$$

qui s'aperçoivent sans difficulté.

1^{er} et 2^e quadrants. — Comme V^2 décroît constamment quand le disque roule sur la demi-circonférence A_0BS et qu'il en est de même de $\cos u$, N décroît aussi, d'après la formule (5). Cette

formule montre encore que N est toujours positif sur le premier quadrant A_0B .

3^e quadrant. — On aperçoit immédiatement que, dans ce quadrant, $\psi'_1(u)$ est toujours négatif; donc $\psi_1(u)$ y décroît sans cesse et, par suite, s'annule au plus une fois; comme $\psi_1(\pi)$ est positif, $\psi_1(u)$ s'annule ou ne s'annule pas selon que l'on a $\psi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) \leq 0$ ou $\psi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0$. De là les conclusions suivantes :

1^{er} cas : $m < \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$. — $\psi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ étant négatif, $\psi_1(u)$ s'annule pour une valeur $u = \alpha$, comprise entre π et $\frac{3\pi}{2}$, en passant du positif au négatif. Donc $\psi'(u)$ s'annule aussi pour cette valeur, et pour celle-là seulement, mais en passant du négatif au positif. Par conséquent $\psi(u)$, et par suite N , est décroissant pour $\pi \leq u < \alpha$, minimum pour $u = \alpha$, croissant pour $\alpha < u \leq \frac{3\pi}{2}$.

2^e cas : $m = \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$. — Ici, $\psi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ est nul : le point $u = \alpha$ de minimum est venu en B' et N décroît constamment de S en B' .

3^e cas : $m > \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$. — $\psi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ est alors positif et $\psi_1(u)$ ne s'annule pas dans l'intervalle $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Il en est donc de même de $\psi'(u)$, qui reste toujours négatif. On en conclut que N décroît encore constamment de S en B' ; mais sa valeur en B' n'est plus un minimum et le point α n'existe plus.

4^e quadrant. — La formule (5) montre que N est toujours positif dans ce quadrant. D'ailleurs, $\psi'_1(u)$ s'annule une fois, passant du négatif au positif, pour une valeur $u = \theta$ dont la tangente est $-\frac{7}{6n\lambda}$, de sorte que $\psi_1(u)$ décroît depuis la valeur $\psi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ jusqu'à un minimum $\psi_1(\theta)$, pour croître ensuite jusqu'à la valeur $\psi_1(2\pi)$ qui est positive. Trois cas peuvent se présenter, les mêmes que pour le 3^e quadrant, selon que $\psi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ est négatif, nul ou positif.

1^{er} cas : $m < \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$. — $\psi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ étant négatif, c'est à partir d'une valeur négative que $\psi_1(u)$ décroît pour atteindre son minimum $\psi_1(\theta)$, puis croît jusqu'à la valeur positive $\psi_1(2\pi)$. Donc $\psi_1(u)$, qui doit admettre un nombre impair de racines entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π , s'annulera une seule fois, en passant du négatif au positif. Si, par conséquent, β désigne la racine unique, $\psi'(u)$ s'annule pour la valeur $u = \beta$, et pour celle-là seulement, en passant du positif au négatif. Il en résulte que N est croissant pour $\frac{3\pi}{2} \leq u < \beta$, maximum pour $u = \beta$ et décroissant pour $\beta < u \leq 2\pi$.

2^e cas : $m = \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$. — Ici, $\psi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ est nul, et c'est à partir de zéro que s'effectue la décroissance initiale de $\psi_1(u)$. Il n'en résulte pas moins, d'après le même raisonnement, que $\psi_1(u)$ s'annule encore, en passant du négatif au positif, pour une valeur $u = \beta$ comprise entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π . Par suite, N est encore croissant pour $\frac{3\pi}{2} \leq u < \beta$, maximum pour $u = \beta$ et décroissant au delà. La différence avec le cas précédent est qu'ici N est minimum pour $u = \frac{3\pi}{2}$.

3^e cas : $m > \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$. — $\psi_1\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ est alors positif, de sorte que $\psi_1(u)$ s'annule un nombre pair de fois entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π . Ce nombre pair est d'ailleurs 0 ou 2, puisque $\psi_1(u)$ varie d'une valeur positive à une valeur positive en passant par un minimum unique. De fait, les deux circonstances peuvent se présenter, le minimum $\psi_1(\theta)$ pouvant être positif, nul ou négatif.

Ce minimum est en effet :

$$\psi_1(\theta) = 2n\lambda m + (\mu \sin \theta + 2n\lambda \cos \theta) e^{2n\lambda\theta},$$

ou, en remplaçant $\sin \theta$ et $\cos \theta$ par :

$$\sin \theta = -\frac{7}{\sqrt{36n^2\lambda^2 + 49}}, \quad \cos \theta = \frac{6n\lambda}{\sqrt{36n^2\lambda^2 + 49}},$$

qui sont leurs valeurs déduites de $\operatorname{tg} \theta$,

$$\psi_1(\theta) = 2n\lambda \left(m - \frac{\sqrt{36n^2\lambda^2 + 49}}{8n\lambda} e^{2n\lambda\theta} \right).$$

Posons alors :

$$(12) \quad \frac{6n\lambda}{7} = \operatorname{tg} \gamma, \quad \pi < \gamma < \frac{3\pi}{2},$$

auquel cas θ est égal à $\frac{\pi}{2} + \gamma$, puis :

$$\frac{\sqrt{36n^2\lambda^2 + 49}}{8n\lambda} e^{2n\lambda\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)} = b,$$

et nous aurons pour le minimum :

$$\psi_1(\theta) = 2n\lambda (m - b).$$

Or, on démontre¹ que, quel que soit $n\lambda$, le nombre b est supérieur à $\frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$. Dans le cas que nous examinons actuellement, où m est supposé surpasser cette dernière quantité, m peut donc être inférieur, égal ou supérieur à b et, par conséquent, le minimum peut être négatif, nul ou positif.

De là, les conclusions qui suivent. Si on a $\frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi} < m < b$, la fonction $\psi_1(u)$, et par suite $\psi'(u)$, s'annule pour deux valeurs de u comprises entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π : $u = \alpha$, $u = \beta$ ($\alpha < \beta$) ; comme $\psi'(u)$ passe du négatif au positif en α , N décroît de $\frac{3\pi}{2}$ à α , est minimum pour $u = \alpha$, croît de α à β , est maximum pour $u = \beta$ et enfin décroît. Si on a $m = b$, les deux points α et β de minimum et de maximum se confondent en un seul θ et N décroît constamment. Si enfin on a $m > b$, $\psi_1(u)$ ni par conséquent $\psi'(u)$ ne s'annule plus dans le quatrième quadrant et N décroît encore sans cesse ; mais les points α et β n'existent plus.

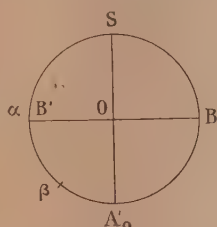
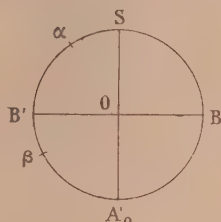
1. On démontre même que b est compris entre $\frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$ et $\frac{\mu}{4n^2\lambda^2} e^{4n\lambda\pi}$. Il suffit pour cela de vérifier la double inégalité

(13) $2n\lambda (12n^2\lambda^2 + 7) < 2n\lambda \sqrt{36n^2\lambda^2 + 49} e^{2n\lambda\gamma_1} < (12n^2\lambda^2 + 7) e^{n\lambda\pi}$, obtenue en remplaçant μ par sa valeur et γ par $\pi + \gamma_1$. Voir la note à la fin de ce travail.

Ensemble des quatre quadrants. — Ayant ainsi étudié la réaction N sur chacun des quatre quadrants, rapprochons les conclusions obtenues chaque fois et nous aurons la variation de N tout le long de la circonférence. On voit ainsi qu'elle se résume de la manière suivante :

$$1^{\circ} e^{2n\lambda\pi} < m < \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}.$$

N décroît jusqu'en un point α du troisième quadrant, où il est minimum ; puis N croît jusqu'en un point β du quatrième quadrant, où il est maximum ; enfin N décroît jusqu'au point A'_0 .

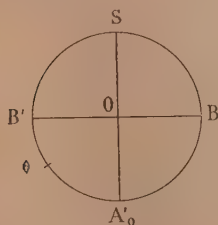


$$2^{\circ} m = \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}.$$

Le point α de minimum est venu en B' et il existe toujours un point β de maximum dans le quatrième quadrant.

$$3^{\circ} \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi} < m < b.$$

Le point α de minimum a encore avancé et a pénétré sur le quatrième quadrant, où se trouve toujours un point β de maximum.



$$4^{\circ} m = b.$$

Les points α et β de minimum et de maximum sont venus se confondre en un même point θ du quatrième quadrant, de sorte que N décroît constamment tout le long de la circonférence.

$$5^{\circ} b < m.$$

Les points de minimum et de maximum n'existent plus et N décroît encore pendant toute la durée de la révolution du disque.

Quant au signe de la réaction N, il résulte de la discussion qui précède. Nous venons de voir que, si l'on a $m \geq \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$, ou

bien N décroît sans cesse, ou bien il a un minimum, mais en un point appartenant au quatrième quadrant. Or, nous savons que, dans ce quadrant, N est toujours positif. Donc, dans ce cas, la réaction N est constamment positive, c'est-à-dire que le disque presse sans cesse vers l'extérieur du cercle. Mais, si l'on a

$$e^{2n\lambda\pi} < m < \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}, \quad N \text{ a un minimum qui répond à un point}$$

α intérieur au troisième quadrant et alors ce minimum peut être positif, nul ou négatif. S'il est positif, N sera encore positif pendant toute la durée de la révolution du disque; s'il est nul, N sera partout positif, sauf au point α où il s'annulera; s'il est négatif, N s'annulera en deux points situés au-dessus du diamètre horizontal BB' et, entre ces deux points, il sera négatif. La condition pour que N ne devienne jamais négatif serait donc que le minimum $\psi(\alpha)$ fût positif ou nul.

6. En supposant toujours que la condition (9) ou (10) est satisfaite, on peut étudier de la même manière la réaction tangentielle T le long de la circonférence.

Si l'on pose

$$\omega(u) = 2n\lambda m e^{-2n\lambda u} + 2n\lambda \cos u + \sin u,$$

il vient, d'après (8),

$$T = \frac{P}{3(4n^2\lambda^2 + 1)} \varpi(u).$$

L'expression (6) de T montre d'ailleurs que cette réaction est toujours positive sur les deux premiers quadrants et qu'elle décroît constamment dans le second. Elle montre en outre que T s'annule en même temps que $\frac{d(V^2)}{du}$ ou $\frac{d\omega}{dt}$, c'est-à-dire aux points α_0 et β_0 où V^2 est minimum et maximum quand ces points existent. On remarque aussi que tout maximum ou minimum de T est de même signe que $\cos u$, u étant la valeur qui le produit; on a en effet

$$\varpi'(u) = -4n^2\lambda^2 m e^{-2n\lambda u} - 2n\lambda \sin u + \cos u = 0$$

qui, avec l'expression de $\omega(u)$, donne

$$\varpi(u) = \frac{4n^2\lambda^2 + 1}{2n\lambda} \cos u.$$

En utilisant ces remarques et en procédant comme dans la discussion de N, on arrive aisément aux conclusions suivantes.

Quand le disque va de B en A₀', en roulant sur l'arc BSB'A₀' formé par les trois derniers quadrants, si on a $m \geq \frac{e^{4n\lambda\pi}}{4n^2\lambda^2}$, T décroît constamment et par suite est toujours positif, puisque sa valeur finale est positive; si au contraire on a $m < \frac{e^{4n\lambda\pi}}{4n^2\lambda^2}$, T décroît jusqu'à un certain minimum, qui est atteint pour $u = \alpha_1$, dans le troisième quadrant, au point B', ou dans le quatrième quadrant, selon que m est inférieur, égal ou supérieur à $\frac{e^{3n\lambda\pi}}{2n\lambda}$, et qui, par conséquent, est négatif dans le premier cas, nul dans le deuxième et positif dans le troisième, puisqu'il est du signe de $\cos u$; au delà du point α_1 , T croît jusqu'à sa valeur finale positive. Quant au premier quadrant, si l'on a $m \geq \frac{1}{4n^2\lambda^2}$, Ty diminue sans cesse; sinon, T croît jusqu'en un certain point $u = \beta_1$, où il est maximum, puis diminue. Comme $\frac{1}{4n^2\lambda^2}$ est moindre que $\frac{e^{4n\lambda\pi}}{4n^2\lambda^2}$, on voit que, quand m est au moins égal à cette dernière quantité, la réaction T diminue pendant toute la durée de la révolution du disque. Remarquons encore que, pour que T ne soit jamais négatif, il faut et il suffit qu'il n'ait pas de minimum à l'intérieur du troisième quadrant, c'est-à-dire que l'on ait $m \geq \frac{e^{3n\lambda\pi}}{2n\lambda}$.

II.

7. Je vais considérer encore le mouvement du disque sur la circonférence A₀BSB'A₀'; mais je lui supposerai ici plus de liberté. J'admets toujours qu'il ne peut que rouler sur la circonférence; mais je supposerai qu'il peut la quitter, la liaison étant maintenant unilatérale. Ce serait vraiment le cas de la piste, dans la pratique, si celle-ci était parfaitement rugueuse.

Les mêmes équations vont convenir, pour un mouvement de progression du centre du disque; mais elles ne conviendront plus

que tant que N ne deviendra pas négatif, puisque alors le disque abandonnerait la circonférence.

8. Proposons-nous le même problème : quel doit être V_0 pour que le disque fasse une fois au moins le tour complet de la circonférence?

Il ne suffit plus ici que la vitesse V ne s'annule pas, c'est-à-dire que la condition (9) ou $m > e^{2n\lambda\pi}$ soit satisfaite, il faut encore que N ne devienne jamais négatif. Or, d'après ce qui a été expliqué à la fin du n° 5, cette nouvelle condition n'est pas toujours remplie d'elle-même quand la première l'est : si on a $m \geq \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$, elle l'est bien, mais on peut avoir, d'après (11),

$$e^{2n\lambda\pi} < \dot{m} < \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi},$$

et alors elle ne l'est plus nécessairement : dans ce cas, en effet, la fonction désignée par $\psi(u)$ a, en un point α du troisième quadrant, un minimum $\psi(\alpha)$ qui peut être positif, nul ou négatif, comme on va le voir, et par conséquent, pour que N ne devienne pas négatif, la condition sera que ce minimum soit positif ou nul.

Cherchons à exprimer cette condition $\psi(\alpha) \geq 0$.

On a

$$\begin{aligned}\psi(\alpha) &= m e^{-2n\lambda\alpha} + \mu \cos \alpha - 2n\lambda \sin \alpha, \\ \psi'(\alpha) &= -2n\lambda m e^{-2n\lambda\alpha} - \mu \sin \alpha - 2n\lambda \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}2n\lambda\psi(\alpha) &= 2n\lambda(\mu - 1) \cos \alpha - (4n^2\lambda^2 + \mu) \sin \alpha, \\ 2n\lambda\psi(\alpha) &= -(4n^2\lambda^2 + \mu) \cos \alpha \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{2n\lambda(\mu - 1)}{4n^2\lambda^2 + \mu} \right),\end{aligned}$$

ou encore, en remplaçant μ par sa valeur,

$$\psi(\alpha) = -\frac{4n^2\lambda^2 + \mu}{2n\lambda} \cos \alpha \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{6n\lambda}{7} \right).$$

Si maintenant nous employons de nouveau la formule (12), avec le même angle γ

$$\frac{6n\lambda}{7} = \operatorname{tg} \gamma, \quad \pi < \gamma < \frac{3\pi}{2},$$

il vient

$$\psi(\alpha) = -\frac{4n^2\lambda^2 + \mu}{2n\lambda} \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \gamma).$$

Comme $\cos \alpha$ est négatif, la condition pour que le minimum $\psi(\alpha)$ soit positif ou nul est que γ soit inférieur ou égal à la racine α de $\psi'(u)$. Or, les nombres compris entre π et $\frac{3\pi}{2}$ qui sont inférieurs à cette racine sont ceux qui rendent $\psi'(u)$ négatif. La condition est donc que $\psi'(\gamma)$ soit négatif ou nul, c'est-à-dire

$$2n\lambda m e^{-2n\lambda\gamma} + \mu \sin \gamma + 2n\lambda \cos \gamma \geq 0,$$

ce qui s'écrit, en remplaçant $\sin \gamma$ et $\cos \gamma$ par leurs valeurs

$$m \geq \frac{\sqrt{36n^2\lambda^2 + 49}}{4} e^{2n\lambda\gamma}.$$

Je désignerai par a le second membre

$$a = \frac{\sqrt{36n^2\lambda^2 + 49}}{4} e^{2n\lambda\gamma}.$$

Cette quantité est moindre que b , car on a évidemment

$$a = \frac{2n3}{e^{n\lambda\pi}} b.$$

Cette égalité montre du reste que, quel que soit $n\lambda$, a est compris entre $e^{2n\lambda\pi}$ et $\frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$, car b étant compris entre $\frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$ et $\frac{\mu}{4n^2\lambda^2} e^{4n\lambda\pi}$, elle montre que a est compris entre $\mu e^{2n\lambda\pi}$ et $\frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$.

On voit donc bien que, quand m est inférieur à $\frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$, la condition (9) ne suffit pas pour que N reste positif ou nul, puisque m peut être compris entre $e^{2n\lambda\pi}$ et a . Il faut alors $m \geq a$. Comme du reste l'inégalité $m \geq \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$ exige $m > a$, on peut dire que, avec les liaisons supposées actuellement, la condition nécessaire et suffisante pour que le disque fasse au moins une fois le tour complet de la circonférence est

$$(14) \quad m \geq a,$$

ou encore, en remplaçant m par sa valeur (3),

$$(15) \quad V_o^2 \geq \frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (1 + a).$$

III.

9. Envisageant toujours le disque sur la circonférence, je vais lui donner un nouveau degré de liberté. Non seulement il sera supposé libre de la quitter, mais encore le roulement sans glissement ne sera plus imposé comme liaison. C'est le cas de la pratique, où il existe un certain coefficient de frottement de glissement, qui a été désigné par f .

Pour que le disque fasse un tour complet en roulant, la condition (14) ou (15) elle-même ne sera plus suffisante ici.

Supposons, en effet, que le disque accomplisse une révolution entière en roulant : les équations précédentes subsistent et la condition (14) est satisfaite, de sorte que les réactions N et T ont les valeurs (7) et (8) et que N est sans cesse positif ou nul. Mais on a en outre, dans notre nouveau mode de liaison, l'inégalité fondamentale

$$(16) \quad fN > |T|.$$

Réciproquement, si cette inégalité est constamment satisfaite par les valeurs (7) et (8) de N et de T , comme elle exige que l'on ait toujours $N > 0$, le disque roulera et fera un tour complet. L'inégalité (16), caractéristique du roulement sans glissement, est donc ici la véritable condition nécessaire et suffisante. Or, elle entraîne la condition (14), mais cette dernière ne suffit pas pour que (16) ait lieu.

10. Nous allons exprimer la condition (16) et en tirer la nouvelle limite de V_o . Nous verrons du reste qu'elle exige aussi que f surpasse un certain nombre.

Remarquons qu'il revient au même d'écrire les deux inégalités simultanées

$$(17) \quad fN - T > 0, \quad (18) \quad fN + T > 0,$$

car, si T est positif ou nul, la première équivaut à (16), tandis que la seconde est satisfaite d'elle-même, et, si T est négatif,

c'est le contraire. Formons donc $fN - T$ et $fN + T$, d'après les formules (7) et (8). On trouve facilement :

$$\frac{3(4n^2\lambda^2 + 1)}{p}(fN - T) = 2m(2f - n\lambda)e^{-2n\lambda u} \\ + (12fn^2\lambda^2 + 7f - 2n\lambda)\cos u \\ - (8fn\lambda + 1)\sin u,$$

$$\frac{3(4n^2\lambda^2 + 1)}{p}(fN + T) = 2m(2f + n\lambda)e^{-2n\lambda u} \\ + (12fn^2\lambda^2 + 7f + 2n\lambda)\cos u \\ - (8fn\lambda - 1)\sin u.$$

Si nous posons alors, pour abréger :

$$8fn\lambda + 1 = c, \quad 12fn^2\lambda^2 + 7f - 2n\lambda = d, \\ 8fn\lambda - 1 = c', \quad 12fn^2\lambda^2 + 7f + 2n\lambda = d',$$

les deux inégalités (17) et (18) s'écrivent :

$$(19) \quad 2m(2f - n\lambda) > e^{2n\lambda u}(c \sin u - d \cos u),$$

$$(20) \quad 2m(2f + n\lambda) > e^{2n\lambda u}(c' \sin u - d' \cos u),$$

où c et d' sont manifestement positifs.

Observons tout de suite que la seconde, devant être vérifiée pour $u = \pi$, donne $m > 0$, ainsi que cela devait être, et que la première, devant être vérifiée pour $u = \frac{\pi}{2}$, donne alors $2f - n\lambda > 0$, ou :

$$f > \frac{n\lambda}{2}.$$

Comme on pouvait le prévoir, le coefficient de frottement ne peut donc être aussi petit qu'on veut : il faut, pour le roulement, qu'il surpasse le nombre $\frac{n\lambda}{2}$. Nous supposons désormais cette con-

dition remplie, de sorte que $2f - n\lambda$ et par suite d seront aussi positifs : seul, c' pourra être positif, nul ou négatif.

On voit sans peine que le second membre de l'inégalité (19) atteint sa plus grande valeur dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ pour une valeur u_1 comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, répondant par conséquent au maximum de ce second membre : u_1 est inférieur, égal ou supé-

rieur à π , selon que $2n\lambda d - c$ est négatif, nul ou positif. De même, le second membre de l'inégalité (20) atteint sa plus grande valeur dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ pour une valeur u_2 comprise toujours entre π et $\frac{3\pi}{2}$, répondant par suite au maximum de ce second membre. Or, pour que les inégalités (19) et (20) soient satisfaites pour toutes les valeurs de u appartenant à l'intervalle $(0, 2\pi)$, il faut évidemment et il suffit que leurs premiers membres constants soient respectivement supérieurs aux plus grandes valeurs des seconds membres dans l'intervalle. Nous pouvons donc remplacer les deux inégalités (19) et (20) par les deux suivantes :

$$(21) \quad 2m(2f - n\lambda) > e^{2n\lambda u_1} (c \sin u_1 - d \cos u_1),$$

$$(22) \quad 2m(2f + n\lambda) > e^{2n\lambda u_2} (c' \sin u_2 - d' \cos u_2),$$

qui donnent des limites inférieures pour m .

Occupons-nous d'abord de la première. Comme u_1 répond à un maximum, il annule la dérivée, de sorte qu'on a :

$$(2n\lambda c + d) \sin u_1 - (2n\lambda d - c) \cos u_1 = 0,$$

qui donne :

$$\tan u_1 = \frac{2n\lambda d - c}{2n\lambda c + d}.$$

D'ailleurs $\cos u_1$ est négatif, tandis que $\sin u_1$ est positif, nul ou négatif, selon que $2n\lambda d - c$ est négatif, nul ou positif. On a donc en tout cas :

$$\sin u_1 = -\frac{2n\lambda d - c}{\sqrt{(4n^2\lambda^2 + 1)(c^2 + d^2)}}, \quad \cos u_1 = -\frac{2n\lambda c + d}{\sqrt{(4n^2\lambda^2 + 1)(c^2 + d^2)}},$$

et par suite :

$$e^{2n\lambda u_1} (c \sin u_1 - d \cos u_1) = \sqrt{\frac{c^2 + d^2}{4n^2\lambda^2 + 1}} e^{2n\lambda u_1}.$$

Comme d'ailleurs on a :

$$c^2 + d^2 = (4n^2\lambda^2 + 1)(36f^2n^2\lambda^2 + 49f^2 - 12fn\lambda + 1),$$

si l'on pose :

$$\Lambda = \frac{\sqrt{36f^2n^2\lambda^2 + 49f^2 - 12fn\lambda + 1}}{2(2f - n\lambda)},$$

l'inégalité (21) s'écrira, $2f - n\lambda$ étant positif :

$$(23) \quad m > e A^{2n\lambda u_1},$$

où u_1 est donné par la formule

$$(24) \quad \text{tang } u_1 = \frac{6fn\lambda - 1}{7f},$$

avec la condition $\frac{\pi}{2} < u_1 < \frac{3\pi}{2}$.

Si nous nous occupons maintenant de l'inégalité (22), et que nous posions

$$B = \frac{\sqrt{36f^2n^2\lambda^2 + 49f^2 + 12fn\lambda + 1}}{2(2f + n\lambda)},$$

on trouve, en opérant de la même manière, que cette inégalité s'écrit :

$$(25) \quad m > B e^{2n\lambda u_2},$$

où u_2 est donné par

$$(26) \quad \text{tang } u_2 = \frac{6fn\lambda + 1}{7f},$$

avec la condition $\pi < u_2 < \frac{3\pi}{2}$.

On peut remarquer que A et B se mettent sous les formes

$$A = \frac{\sqrt{(6fn\lambda - 1)^2 + 49f^2}}{2(2f - n\lambda)} = \frac{7f}{2(2f - n\lambda) \cos u_1},$$

$$B = \frac{\sqrt{(6fn\lambda + 1)^2 + 49f^2}}{2(2f + n\lambda)} = \frac{7f}{2(2f + n\lambda) \cos u_2}.$$

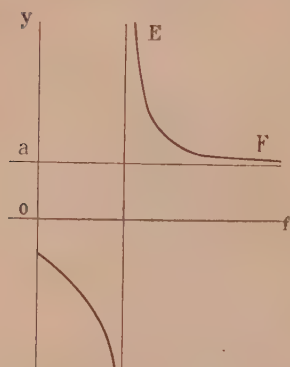
Étudions comment varie la fonction de f :

$$y = A e^{2n\lambda u_1}$$

quand on fait croître f de 0 à ∞ . Si l'on cherche sa dérivée, en employant pour A la forme rationnelle que je viens d'indiquer et qui facilite le calcul, on trouve :

$$2 \frac{dy}{df} = - \frac{(4n^2\lambda^2 + 1)(9fn\lambda + 2)}{(2f - n\lambda)^2 \sqrt{36f^2n^2\lambda^2 + 49f^2 - 12fn\lambda + 1}} e^{2n\lambda u_1}.$$

Pour $f \geq 0$, cette dérivée est toujours négative; donc y décroît sans cesse. Quand f croît de 0 à $\frac{n\lambda}{2}$, y décroît depuis $-\frac{1}{2n\lambda} e^{n\lambda\pi}$



jusqu'à $-\infty$; puis, quand f croît de $\frac{n\lambda}{2}$ à ∞ , y décroît de $+\infty$ à

$$\frac{\sqrt{36n^2\lambda^2 + 49}}{4} e^{2n\lambda u_1},$$

u_1 étant donné par

$$\operatorname{tg} u_1 = \frac{6n\lambda}{7}$$

et appartenant au 3^e quadrant. Si l'on se reporte au n^o 8, on constate que u_1

n'est autre que l'angle désigné là par γ et que par conséquent la valeur de y pour f infini n'est autre que la quantité appelée a . Il devait en être ainsi, car, si f devient infini, l'inégalité (23) doit se réduire à $m > a$, puisqu'elle traduit l'inégalité $fN - T > 0$ qui se réduit alors à $N > 0$.

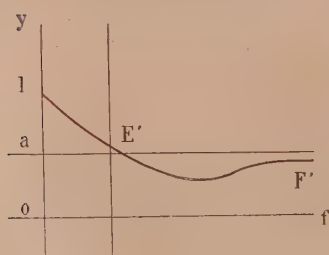
Étudions de même comment varie la fonction

$$y = B e^{2n\lambda u_2}$$

quand f varie de 0 à $+\infty$. On trouve pour sa dérivée :

$$2 \frac{dy}{df} = \frac{(4n^2\lambda^2 + 1)(9fn\lambda - 2)}{(2f + n\lambda)^2 \sqrt{36f^2n^2\lambda^2 + 49f^2 + 12fn\lambda + 1}} e^{2n\lambda u_2},$$

expression qui est négative, nulle ou positive, selon que f est in-



férior, égal ou supérieur à $\frac{2}{9n\lambda}$.

Par suite, lorsque f croît de 0 à ce nombre, y décroît depuis une

certaine valeur, qui est $\frac{1}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$,

jusqu'à un minimum déterminé;

puis, f augmentant de $\frac{2}{9n\lambda}$ à ∞ , y

croît jusqu'à une valeur qui est encore visiblement la quantité a . La fonction y est d'ailleurs toujours positive. On devait bien, ici

aussi, retrouver la quantité a , car l'inégalité $fN + T > 0$, tout comme $fN - T > 0$, se réduit à $N > 0$ lorsque f augmente à l'infini. Mais on devait également obtenir $\frac{1}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$ comme valeur de y pour f nul : en effet, l'inégalité $fN + T > 0$, que traduit (25), se réduit à $T > 0$ quand f s'annule ; or, nous avons vu au n° 6 que la condition pour que T soit constamment positif est :

$$m > \frac{1}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}.$$

Sur la figure, j'ai représenté cette longueur l de y pour $f=0$ comme étant supérieure à a ; mais elle peut lui être inférieure ou égale, selon la valeur de $n\lambda$.

Comme f est supérieur à $\frac{n\lambda}{2}$, les deux courbes ne sont utiles que par leurs parties EF, E'F' situées à droite de l'asymptote $f = \frac{n\lambda}{2}$. A une valeur donnée de f répondent un point sur EF et un point sur E'F'. La condition nécessaire et suffisante pour que le disque fasse un tour complet en roulant est que m soit supérieur à la fois aux ordonnées de ces deux points, dont l'une est toujours plus grande que a .

Si donc h désigne la plus grande, la condition est

$$(27) \quad m > h,$$

ou, en remplaçant m par sa valeur (3),

$$(28) \quad V_0^2 > \frac{2npq^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (1 + h),$$

h étant supérieur à a .

Tant que le coefficient de frottement ne dépasse pas une certaine limite $\frac{n\lambda}{2}$, il n'existe aucune vitesse V_0 capable de produire le roulement, même sur le premier quadrant complet. Pour les valeurs de f peu supérieures à cette limite, il faut de grandes vitesses V_0 pour amener le roulement sur la circonférence totale. Puis, à mesure que f augmente, la grandeur requise pour V_0 diminue de plus en plus, et, pour f infini, il suffit que l'inégalité (15) soit satisfaite.

Remarquons que, dans tout ce qui précède, on n'a fait aucune supposition particulière sur la valeur numérique du coefficient λ , tous les résultats ayant été établis quelle que soit la grandeur de $n\lambda$.

11. Lorsqu'on suppose λ nul, c'est-à-dire lorsqu'on fait abstraction de la résistance de l'air, les formules (4), (7), (8), qui donnent la vitesse, la réaction normale et la réaction tangentielle, se réduisent respectivement aux suivantes :

$$V^2 = 2npg^2 (m + \cos u),$$

$$N = \frac{4p}{3} \left(m + \frac{7}{4} \cos u \right),$$

$$T = \frac{p}{3} \sin u.$$

On a en outre :

$$a = \frac{7}{4}, \quad A = B = \frac{\sqrt{49f^2 + 1}}{4f},$$

et les deux courbes précédentes se confondent.

Les conditions (9), (14) et (27) deviennent ainsi :

$$m > 1, \quad m \geq \frac{7}{4}, \quad m > \frac{\sqrt{49f^2 + 1}}{4f},$$

ou, en remplaçant m par sa valeur,

$$V_0^2 > 4npg^2, \quad V_0^2 \geq \frac{11}{2}npg^2, \quad V_0^2 > \frac{np g^2}{2f} (4f + \sqrt{49f^2 + 1}).$$

L'asymptote $f = \frac{n\lambda}{2}$ se confond ici avec l'axe des y et, pour les moindres valeurs du coefficient de frottement, il existe des vitesses V_0 capables de produire le roulement sur la totalité de la circonférence.

IV.

12. Je n'ai considéré jusqu'ici le mouvement du disque que sur la circonférence $A_0BSB'A_0$ et, au paragraphe III, j'ai obtenu les deux conditions définitives pour que le disque fasse en roulant au

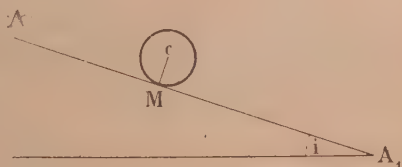
moins un tour de la circonférence : la première fixe une limite $\frac{n\lambda}{2}$ que f doit surpasser ; puis, étant donnée une valeur de f supérieure à cette limite, la seconde condition donne un nombre correspondant au-dessus duquel doit s'élever la valeur de V_0 .

Je vais maintenant envisager le disque sur la droite AA_1 . Je rappelle qu'on a désigné par D la longueur de cette droite, par i son inclinaison et par V_1 la vitesse du centre C du disque au moment où il arrive au bas de la droite.

13. Considérons le disque dans une de ses positions. Soit x la distance AM du point de contact M au point de contact initial A . Supposons que le disque roule sans glisser sur la droite.

Sa force vive est $\frac{p}{g} \left(1 + \frac{k^2}{r^2} \right) V^2$; les travaux élémentaires du poids et de la résistance de l'air sont $p \sin i \, dx$ et $-\frac{\lambda}{g^2} V^2 \, dx$.

L'équation des forces vives est donc :



$$\frac{1}{2} \frac{p}{g} \left(1 + \frac{k^2}{r^2} \right) d(V^2) = p \sin i \, dx - \frac{\lambda}{g^2} V^2 \, dx,$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{d(V^2)}{dx} + \frac{4\lambda}{3pg} V^2 = \frac{4}{3} g \sin i.$$

Son intégrale générale étant

$$V^2 = ce^{-\frac{4\lambda}{3pg}x} + \frac{pg^2}{\lambda} \sin i,$$

si l'on écrit que, pour $x = 0$, V est nul, il vient

$$V^2 = \frac{pg^2 \sin i}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{4\lambda}{3pg}x} \right).$$

Les deux équations du mouvement du centre de gravité donneront la réaction normale N et la réaction tangentielle T .

$$(29) \quad N = p \cos i,$$

$$(30) \quad T = -\frac{p}{4g} \frac{d(V^2)}{dx} = -\frac{p}{3} \sin i + \frac{\lambda V^2}{3g^2},$$

$$T = -\frac{1}{3} p \sin i e^{-\frac{4\lambda}{3pg}x},$$

la première égalité (30) pouvant d'ailleurs s'écrire immédiatement.

La condition de roulement est ici que l'on ait

$$fp \cos i - \frac{1}{3} p \sin i e^{-\frac{4\lambda}{3pg}x} > 0,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tg} i < 3f e^{\frac{4\lambda}{3pg}x}$$

pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(0, D)$. Il faut et il suffit pour cela que l'inégalité ait lieu pour $x = 0$, au départ. La condition de roulement est donc

$$\operatorname{tg} i < 3f.$$

En la supposant remplie, on a pour la vitesse du centre du disque à son arrivée en A_1

$$(31) \quad V_1^2 = \frac{pg^2 \sin i}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{4\lambda}{3pg}D} \right);$$

Remarquons que, si l'on négligeait la résistance de l'air, en faisant $\lambda = 0$, on aurait

$$V^2 = \frac{4}{3} g \sin i x, \quad T = -\frac{1}{3} p \sin i.$$

V.

14. Considérons ensuite le disque sur l'arc de cercle A_1A_0 , d'angle au centre égal à i , arc sur lequel il pénètre avec la vitesse V_1 .

Il revient manifestement au même de regarder le disque comme placé sur la circonférence $A_0BSB'A'_0$, en un point A'_1 symétrique de A_1 par rapport au diamètre A_0S et animé en ce point A'_1 de la

vitesse V_1 dans le sens des u décroissants. Or, on a vu que les équations qui conviennent au roulement dans ce sens se déduisent de celles qui ont été établies au paragraphe I en changeant λ en $-\lambda$ et T en $-T$. Nous aurons donc pour l'intégrale générale de l'équation des forces vives

$$V^2 = C e^{2n\lambda u} + \frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (\cos u + 2n\lambda \sin u),$$

et par suite, en déterminant la constante C de manière que, pour $u = i$, on ait $V = V_1$,

$$C = V_1^2 e^{-2n\lambda i} - \frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (\cos i + 2n\lambda \sin i) e^{-2n\lambda i},$$

$$(32) \quad V^2 = V_1^2 e^{-2n\lambda(i-u)} + \frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (\cos u + 2n\lambda \sin u) \\ - \frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (\cos i + 2n\lambda \sin i) e^{-2n\lambda(i-u)}.$$

Nous aurons aussi, pour N et T , d'après les formules (5) et (6)

$$(33) \quad N = p \cos u + \frac{2V^2}{3ng^2},$$

$$(34) \quad T = \frac{1}{6ng^2} \frac{d(V^2)}{du} = -\frac{p}{3} \sin u + \frac{\lambda V^2}{3g^2}.$$

En faisant $u = 0$ dans (32), nous obtenons la valeur V_0 de V au point A_0

$$(35) \quad V_0^2 e^{2n\lambda i} = V_1^2 + \frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (e^{2n\lambda i} - \cos i - 2n\lambda \sin i).$$

On peut d'ailleurs exprimer la constante C en fonction de V_0 et, si l'on désigne toujours par m la même quantité (3), supérieure à -1 , il vient

$$C = \frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} m,$$

puis les égalités

$$(36) \quad V^2 = \frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (m e^{2n\lambda u} + \cos u + 2n\lambda \sin u),$$

$$(37) \quad N = \frac{4p}{3(4n^2\lambda^2 + 1)} (m e^{2n\lambda u} + \mu \cos u + 2n\lambda \sin u),$$

$$(38) \quad T = \frac{P}{3(4n^2\lambda^2 + 1)} (2n\lambda me^{2n\lambda u} + 2n\lambda \cos u - \sin u),$$

qui se déduisent de (4), (7), (8) en changeant λ en $-\lambda$ et T en $-T$.

15. Il est clair, physiquement parlant, que la vitesse V ne peut s'annuler; cela résultera d'ailleurs de la discussion qui en sera faite plus loin. D'autre part, la formule (33) montre que N est constamment positif. Si donc l'arc A_1A_0 était parfaitement rugueux, bien que la liaison soit unilatérale, on serait assuré que le disque le parcourrait tout entier en roulant. Il reste à voir si, dans le cas supposé où il y a un coefficient de frottement fini f , le roulement se produit encore.

Je dis que, si le disque roulait auparavant sur la droite AA_1 et s'il doit rouler ultérieurement sur la circonférence $A_0BSB'A'_0$, il roulera également sur l'arc A_1A_0 .

En effet, N étant constamment positif, la condition de roulement s'exprime par les deux inégalités

$$fN - T > 0, \quad fN + T > 0,$$

qui doivent être satisfaites pour toutes les valeurs de u appartenant à l'intervalle $(0, i)$ et qui, à cause de (33) et de (34), s'écrivent

$$\frac{P \cos u}{3} (3f + \operatorname{tg} u) + \frac{2V^2}{3ng^2} \left(f - \frac{n\lambda}{2} \right) > 0,$$

$$\frac{P \cos u}{3} (3f - \operatorname{tg} u) + \frac{2V^2}{3ng^2} \left(f + \frac{n\lambda}{2} \right) > 0.$$

Or, si le disque a roulé sur la droite AA_1 , on a $\operatorname{tg} i < 3f$ et *a fortiori* $\operatorname{tg} u < 3f$; s'il doit rouler sur la circonférence, on a $f > \frac{n\lambda}{2}$. Les deux inégalités sont donc évidemment satisfaites et le disque roulera sur A_1A_0 .

Je supposerai ces conditions remplies, c'est-à-dire, somme toute, f supérieur à la plus grande des deux quantités $\frac{\operatorname{tg} i}{3}$ et $\frac{n\lambda}{2}$.

16. La variation de la vitesse V se suit aisément le long de l'arc A_1A_0 .

La dérivée $\frac{d(V^2)}{du}$ est négative au point A_1 , car si l'on dérive

(32) et que l'on fasse $u = i$, on obtient

$$\frac{d(V^2)}{du} = 2n (\lambda V_1^2 - pg^2 \sin i),$$

ou, en remplaçant V_1^2 par sa valeur (31),

$$\frac{d(V^2)}{du} = -2npg^2 \sin i e^{-\frac{4\lambda}{3pg}D}.$$

Au contraire, cette dérivée est positive au point A_0 , car, si l'on dérive (36) et qu'on fasse $u = 0$, on trouve

$$\frac{d(V^2)}{du} = \frac{4n^2 \lambda pg^2}{4n^2 \lambda^2 + 1} (m + 1),$$

quantité positive, puisque m est supérieur à -1 .

La dérivée $\frac{d(V^2)}{du}$ passe donc par zéro un nombre impair de fois entre $u = 0$ et $u = i$. Mais elle n'y passe qu'une fois, car elle s'écrit

$$\frac{2npg^2}{4n^2 \lambda^2 + 1} e^{2n\lambda u} [2n\lambda m - (\sin u - 2n\lambda \cos u) e^{-2n\lambda u}],$$

et la dérivée du second facteur, le seul qui puisse devenir nul, étant

$$-(4n^2 \lambda^2 + 1) \cos u e^{-2n\lambda u},$$

il ne peut s'annuler qu'une seule fois. Soit alors $u = w_0$ la valeur unique pour laquelle la dérivée $\frac{d(V^2)}{du}$ est nulle : comme elle y passe du négatif au positif, quand u décroît de i à 0, on voit que la vitesse V augmente quand u décroît de i à w_0 , qu'elle est maximum pour $u = w_0$, et qu'elle diminue lorsque u continue à décroître de w_0 à 0.

On trouve d'ailleurs facilement que le maximum de V^2 est

$$V^2 = \frac{pg^2}{\lambda} \sin w_0.$$

17. La variation de la réaction normale le long de l'arc $A_1 A_0$ est de même nature.

Effectivement, en dérivant la formule (33), on obtient :

$$\frac{dN}{du} = -p \sin u + \frac{2}{3ng^2} \frac{d(V^2)}{du},$$

qui, pour $u = i$ et pour $u = 0$, donne :

$$\frac{dN}{du} = -p \sin i + \frac{2}{3ng^2} \frac{d(V^2)}{du},$$

$$\frac{dN}{du} = \frac{2}{3ng^2} \frac{d(V^2)}{du}.$$

Or $\frac{d(V^2)}{du}$ est négatif en A_i et positif en A_0 . Il en est donc de même

de $\frac{dN}{du}$ et, par conséquent, cette dérivée s'annule un nombre impair de fois sur l'arc $A_i A_0$. Mais elle ne s'annule qu'une fois, car autrement, l'équation

$$2n\lambda m - (\mu \sin u - 2n\lambda \cos u) e^{-2n\lambda u} = 0,$$

obtenue en égalant à zéro la dérivée de (37), aurait au moins trois racines, de sorte que son équation dérivée en aurait au moins deux; or elle n'en a qu'une, car elle s'écrit :

$$6n\lambda \sin u - 7 \cos u = 0.$$

Si alors $u = w$ désigne la valeur unique pour laquelle $\frac{dN}{du}$ est nul, on voit que N augmente quand u décroît de i à w , que N est maximum pour $u = w$ et qu'il diminue ensuite lorsque u décroît de w à 0.

Quant à la grandeur du maximum, elle est donnée par la formule (37) :

$$N = \frac{4p}{3(4n^2\lambda^2 + 1)} (me^{2n\lambda w} + \mu \cos w + 2n\lambda \sin w),$$

où w satisfait à l'équation

$$2n\lambda me^{2n\lambda w} - \mu \sin w + 2n\lambda \cos w = 0,$$

qui permet d'éliminer l'exponentielle. On trouve ainsi pour le maximum :

$$N = \frac{P}{6n\lambda} (7 \sin w + 6n\lambda \cos w),$$

où l'on pourrait introduire l'angle γ de la formule (12).

18. Occupons-nous enfin de la réaction tangentielle T.

D'après la formule (34), elle s'annule une fois sur l'arc A_1A_0 , au point $u = w_0$ où la vitesse V est maximum : de A_1 à w_0 elle est négative et, de w_0 à A_0 , elle est positive.

T peut d'ailleurs avoir un maximum comme il peut en être dépourvu.

Remarquons d'abord que la dérivée $\frac{dT}{du}$ s'annule une fois au plus dans l'intervalle $(0, i)$. La formule (38) donne en effet :

$$(39) \quad \frac{dT}{du} = \frac{p}{3(4n^2\lambda^2 + 1)} e^{2n\lambda u} [4n^2\lambda^2 m - (2n\lambda \sin u + \cos u) e^{-2n\lambda u}];$$

or, la dérivée du second facteur, le seul qui puisse s'annuler, étant :

$$(4n^2\lambda^2 + 1) \sin u e^{-2n\lambda u},$$

ce facteur passe au plus une fois par zéro. Il en est donc de même de $\frac{dT}{du}$.

Observons ensuite que $\frac{dT}{du}$ est négatif au point A_1 , car la formule (34) donne :

$$\frac{dT}{du} = -\frac{p}{3} \cos u + \frac{\lambda}{3g^2} \frac{d(V^2)}{du}$$

et $\frac{d(V^2)}{du}$ est négatif en A_1 .

Remarquons enfin que (39) donne comme valeur de $\frac{dT}{du}$ au point A_0 :

$$\frac{dT}{du} = \frac{4n^2\lambda^2 p}{3(4n^2\lambda^2 + 1)} \left(m - \frac{1}{4n^2\lambda^2} \right).$$

De là les conclusions suivantes. Si l'on a $m < \frac{1}{4n^2\lambda^2}$, la dérivée $\frac{dT}{du}$ est sans cesse négative, de sorte que T croît constamment

quand u décroît de i à 0. Si l'on a $m = \frac{1}{4n^2\lambda^2}$, $\frac{dT}{du}$ est sans cesse négatif, sauf au point A_0 , où il est nul, de sorte que T croît constamment et est maximum à l'extrémité A_0 de l'arc. Si enfin m est

supérieur à $\frac{1}{4n^2\lambda^2} \cdot \frac{dT}{du}$ s'annule pour une valeur $u = \beta_1$, comprise entre 0 et i , passant en ce point du négatif au positif : la réaction T croît donc de Λ_1 en β_1 , est maximum en β_1 , puis décroît de β_1 en Λ_0 .

On trouve d'ailleurs aisément pour la grandeur du maximum, quand il existe :

$$T = \frac{P}{6n\lambda} \cos \beta_1.$$

Ce maximum est par conséquent positif, ainsi que cela devait être, puisque T , négatif pour $u = i$, est positif pour $u = 0$.

19. Lorsqu'on fait abstraction de la résistance de l'air, les formules (36), (37), (38), qui donnent la vitesse, la réaction normale et la réaction tangentielle se réduisent à :

$$V^2 = 2npg^2(m + \cos u),$$

$$N = \frac{4p}{3} \left(m + \frac{7}{4} \cos u \right),$$

$$T = -\frac{P}{3} \sin u.$$

Les points w_0 et w de maximum de V et de N coïncident alors avec le point A_0 de sorte que c'est en ce point que T s'annule.

L'unique condition imposée à f est d'ailleurs $f > \frac{\operatorname{tg} i}{3}$.

VI.

20. Considérons enfin le disque sur la droite horizontale A'_0H . Les formules relatives à cette partie finale de la piste vont se déduire de celles qui concernent le plan incliné AA_1 en y faisant $i = 0$.

Ayant appelé V'_0 la vitesse du centre du disque à la sortie de la circonférence en A'_0 , auquel cas on a :

$$V'^2_0 = \frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (me^{-4n\lambda\pi} + 1),$$

on obtient sans difficulté :

$$V^2 = V'^2_0 e^{-\frac{4\lambda}{3\rho g} x},$$

$$N = p,$$

$$(40) \quad T = -\frac{\rho}{4g} \frac{d(V^2)}{dx} = \frac{\lambda V^2}{3g^2} = \frac{\lambda V_0'^2}{3g^2} e^{-\frac{4\lambda}{3pg}x},$$

x désignant l'abscisse du point de contact comptée à partir de A' dans le sens $A'H$.

La condition de roulement $\operatorname{tg} i < 3f$ est d'ailleurs satisfaite d'elle-même puisque i est nul.

Si l'on faisait abstraction de la résistance de l'air, la vitesse V et la réaction tangentielle seraient constantes.

VII.

21. Il résulte de ce qui précède que, pour que le disque boucle la boucle en roulant, il faut et il suffit :

1° Que f soit supérieur au plus grand des deux nombres $\frac{\operatorname{tg} i}{3}$ et $\frac{n\lambda}{2}$;

2° Que la vitesse V_0 , acquise par le centre du disque à son arrivée en A_0 , soit assez grande pour que l'on ait $m > h$.

Pour un disque donné, cette dernière inégalité exige, comme il était facile de le prévoir, que les dimensions R , i , D de la piste remplissent certaines conditions, ainsi que le coefficient f .

Remplaçons dans (3) V_0^2 par sa valeur (35), puis, dans le résultat, V_1^2 par sa valeur (31); il vient :

$$m = \frac{\sin i - 2n\lambda \cos i - (4n^2\lambda^2 + 1) \sin i e^{-\frac{4\lambda}{3pg}D}}{2n\lambda e^{2n\lambda i}}.$$

Cette expression montre que, n et i , c'est-à-dire R et ι , étant donnés, la plus grande valeur que puisse acquérir m est :

$$m' = \frac{\sin i - 2n\lambda \cos i}{2n\lambda e^{2n\lambda i}},$$

et encore est-ce pour D infini. La dérivée de m' par rapport à ι :

$$\frac{(4n^2\lambda^2 + 1) \cos i}{2n\lambda e^{2n\lambda i}}$$

étant positive, m' augmente sans cesse quand i croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et,

pour $i = \frac{\pi}{2}$, m' atteint son maximum qui est :

$$m'' = \frac{1}{2n\lambda e^{n\lambda\pi}}.$$

Cela posé, remarquons que, pour que m surpasse h , il faut déjà que m surpasse a , puisque h est supérieur à a . Or, si le maximum m'' était égal ou inférieur à a , pour aucune valeur de i et de D , m ne pourrait surpasser a . Une première condition nécessaire est donc que l'on ait $m'' > a$. Si nous la supposons remplie, il se trouve un angle j tel que m' soit égal à a et alors, pour qu'il existe des valeurs de D , il faut évidemment et il suffit que i soit supérieur à j et les valeurs de D seront celles qui vérifieront l'inégalité

$$\frac{\sin i - 2n\lambda \cos i - (4n^2\lambda^2 + 1) \sin i e^{-\frac{4\lambda}{3pg}D}}{2n\lambda e^{2n\lambda i}} > a.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait $m > a$ sont ainsi :

$$2n\lambda a e^{n\lambda\pi} < 1, \quad (41) \quad i > j,$$

$$(42) \quad D > \frac{3pg}{4\lambda} \log \frac{(4n^2\lambda^2 + 1) \sin i}{\sin i - 2n\lambda \cos i - 2n\lambda a e^{2n\lambda i}},$$

j étant la racine de l'équation

$$2n\lambda a e^{2n\lambda i} - \sin i + 2n\lambda \cos i = 0.$$

Comme on a $a = \frac{2n\lambda}{e^{n\lambda\pi}} b$, la première de ces inégalités s'écrit :

$$b < \frac{1}{4n^2\lambda^2}.$$

Elle fixe la limite supérieure de $n\lambda$ ou de R . Si, en effet, on y remplace b par sa valeur, elle devient :

$$n\lambda \sqrt{36n^2\lambda^2 + 49} e^{2n\lambda\left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right)} < 2.$$

Or, celle-ci est vérifiée pour les valeurs de $n\lambda$ qui sont inférieures à la racine φ de l'équation en $n\lambda$:

$$n^2\lambda^2(36n^2\lambda^2 + 49) e^{4n\lambda\left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right)} - 4 = 0,$$

racine qui est comprise entre 0,10 et 0,11, ainsi qu'on le voit aisément en tenant compte de la valeur (12) de $\operatorname{tg} \gamma$ et faisant les deux substitutions. La première inégalité équivaut donc à $n\lambda < \varphi$, ou, en remplaçant n par sa valeur (1) :

$$(43) \quad R < r + \frac{3pg}{2\lambda} \varphi.$$

Pour qu'on ait maintenant $m > h$, il faudra en outre donner à la piste et au disque un coefficient de frottement suffisamment grand. Reportons-nous en effet aux parties utiles des deux courbes du n° 10, et coupons-les par la droite $y = m$: la première au moins donnera un point d'intersection. Si F désigne alors la plus grande des abscisses des points d'intersection, pour que m soit supérieur à h , il faut et il suffit que f soit supérieur à F .

Telles sont les conditions multiples auxquelles équivaut l'inégalité $m > h$. Si nous les supposons remplies, nous aurons en particulier :

$$\sin i - 2n\lambda \cos i > 2n\lambda a e^{2n\lambda i}$$

qui, a et $e^{2n\lambda i}$ étant plus grands que l'unité, donne $\operatorname{tg} i > 4n\lambda$, et par suite $\frac{\operatorname{tg} i}{3} > \frac{4n\lambda}{3}$. La plus grande des deux quantités $\frac{\operatorname{tg} i}{3}$ et

$\frac{n\lambda}{2}$ est donc $\frac{\operatorname{tg} i}{3}$. Il en résulte que la première condition, qui di-

sait que f doit surpasser le plus grand des deux nombres $\frac{\operatorname{tg} i}{3}$ et

$\frac{n\lambda}{2}$, revient à dire que f doit être supérieur à $\frac{\operatorname{tg} i}{3}$.

On en conclut que la condition à laquelle doit satisfaire le coefficient de frottement et qui doit être adjointe aux inégalités (41), (42), (43) se résume en ceci que f doit être supérieur au plus grand des deux nombres $\frac{\operatorname{tg} i}{3}$ et F .

On voit d'ailleurs aisément que, lorsque λ est nul, les conditions (41) et (43) sont remplies d'elles-mêmes, quels que soient R et i , tandis que (42) est remplacé par :

$$D > \frac{3}{2} \frac{np g}{\sin i} \left(\cos i + \frac{7}{4} \right).$$

Quant à f , il doit alors surpasser le plus grand des deux nombres $\frac{\operatorname{tg} i}{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{16m^2 - 4g}}$.

22. Les conditions précédentes étant regardées comme satisfaites, le disque boucle la boucle en roulant. Je vais donner dans leur ensemble les variations de la vitesse V et des deux réactions N et T .

Pour définir uniformément la position du disque sur toute l'étendue de la piste, j'adopterai un paramètre unique, qui sera la longueur X du chemin parcouru par le centre G à partir de l'instant du départ. On aura ainsi :

$$\begin{aligned} X &= x, \\ X &= D + (R - r)(i - u), \\ X &= D + (R - r)(i + u), \\ X &= D + (R - r)(i + 2\pi) + x, \end{aligned}$$

selon que le disque touche la droite AA_1 , l'arc de cercle A_1A_0 , la circonférence $A_0BSB'A'_0$ ou l'horizontale A'_0H .

Remarquons que l'on a

$$\frac{d(V^2)}{du} = (R - r) \frac{d(V^2)}{dX},$$

et, à cause de (1),

$$\frac{1}{6ng^2} = \frac{p}{4(R - r)g}.$$

Si donc on se reporte aux formules (30), (34), (6), (40), on voit que, tout le long de la piste, la réaction tangentielle est exprimée uniformément par la formule

$$(44) \quad T = -\frac{p}{4g} \frac{d(V^2)}{dX},$$

qui montre que T ne diffère de la dérivée $\frac{d(V^2)}{dX}$ que par un facteur constant négatif.

La vitesse V varie d'une manière continue pendant toute la durée du trajet et sera une fonction continue de X . Il en sera de même de la réaction tangentielle, car les expressions

$$T = -\frac{p}{3} \sin i + \frac{\lambda V^2}{3g^2},$$

$$T = -\frac{p}{3} \sin u + \frac{\lambda V^2}{3g^2},$$

$$T = \frac{p}{3} \sin u + \frac{\lambda V^2}{3g^2},$$

$$T = -\frac{\lambda V^2}{3g^2},$$

qui la représentent successivement sur les diverses parties de la piste, montrent qu'aux points de raccordement A_r et A'_o , où la courbure change brusquement, cette réaction est encore continue.

Par suite, à cause de (44), $\frac{d(V^2)}{dX}$ varie aussi d'une manière continue.

Mais il n'en est pas de même de $\frac{dT}{dX}$, ni par conséquent de $\frac{d^2(V^2)}{dX^2}$: en A_r et en A'_o , $\frac{dT}{dX}$ passe subitement d'une valeur à une autre. Effectivement, au point A_r , on a d'une part

$$\frac{dT}{dX} = \frac{\lambda}{3g^2} \frac{d(V^2)}{dX},$$

et d'autre part

$$\frac{dT}{dX} = \frac{p \cos i}{3(R-r)} + \frac{\lambda}{3g^2} \frac{d(V^2)}{dX};$$

$\frac{dT}{dX}$ y augmente donc brusquement de $\frac{p \cos i}{3(R-r)}$. De même, en A'_o , on a d'un côté

$$\frac{dT}{dX} = \frac{p}{3(R-r)} + \frac{\lambda}{3g^2} \frac{d(V^2)}{dX},$$

et de l'autre

$$\frac{dT}{dX} = \frac{\lambda}{3g^2} \frac{d(V^2)}{dX};$$

$\frac{dT}{dX}$ y diminue donc brusquement de $\frac{p}{3(R-r)}$. En raison de la discontinuité de la courbure aux deux points considérés, les fonctions continues T et $\frac{d(V^2)}{dX}$ n'y ont pas de dérivée.

La réaction normale est aussi discontinue aux mêmes points.

En effet, les formules (29), (33) et (5) qui l'expriment sur le plan incliné, sur l'arc de cercle et sur la circonférence, et la formule $N = p$ qui la représente sur l'horizontale, montrent que cette réaction augmente brusquement de $\frac{2 V_1'^2}{3 n g^2}$ au point A_1 , tandis qu'à la sortie, en A'_0 , elle diminue subitement de $\frac{2 V_0'^2}{3 n g^2}$.

J'emploierai la représentation graphique pour résumer les variations qu'éprouvent V , T et N , quand X croît depuis 0 jusqu'à la longueur totale de la piste. Pour indiquer sur l'axe des X les positions remarquables du centre C du disque, je me servirai des mêmes lettres A , A_1 , A_2 , B , S , W , α , β , etc., qui ont servi jusqu'ici à désigner les positions correspondantes du point de contact M sur la piste. Je désignerai d'ailleurs par la même lettre un point de la courbe et le pied de son ordonnée.

Observons encore que les inégalités (11) se complètent désormais comme il suit :

$$(45) \quad \frac{e^{2n\lambda\pi}}{2n\lambda} < \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi} < b < \frac{1}{4n^2\lambda^2} < \frac{e^{4n\lambda\pi}}{4n^2\lambda^2},$$

car on a dit au n° 6 (note) que, quel que soit $n\lambda$, b est supérieur à $\frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$, tandis que nous avons vu au n° 21 que b doit être actuellement supposé moindre que $\frac{1}{4n^2\lambda^2}$. La quantité m peut occuper une place quelconque dans cette suite.

23. Pour figurer les variations de V et de T , il suffit de construire le lieu des points dont les abscisses sont les valeurs de X et dont les ordonnées sont les valeurs corrélatives de V^2 . En effet, d'après (44), $\frac{d(V^2)}{dX}$ varie proportionnellement à T : la même courbe représentera donc la variation de T par celle du coefficient angulaire de sa tangente. Les points où la tangente sera parallèle à l'axe des X seront des points où T sera nul ; les points d'inflexion seront des points de maximum ou de minimum pour T , et la courbe tournera sa convexité ou sa concavité vers les ordonnées positives, selon que T sera croissant ou décroissant.

Étant donnés les résultats des nos 13, 16 et 18, on peut déjà conclure de là que, quel que soit m , l'ordonnée V^2 croît toujours du

point A au point W_0 , où elle est maximum, et que, dans cet intervalle, la courbe est sans cesse convexe vers les ordonnées positives. Le point W_0 est d'ailleurs compris entre A_1 et A_3 . On en déduit aussi, d'après ce qui a été dit au n° 20, que, quel que soit m , l'ordonnée décroît toujours au delà du point A'_0 et que, dans cette région, la courbe est au contraire constamment concave. Il faut observer que, en raison de ce dernier fait, si la courbe arrive au point A'_0 en tournant sa convexité vers le haut, la courbure changera de sens en ce point, où $\frac{d(V^2)}{dX^2}$ passera brusquement d'une valeur négative à une valeur positive, de sorte que le point A'_0 sera un point d'inflexion.

Quant à la forme de la courbe entre les points W_0 et A'_0 , elle dépend de la valeur de m . En rapprochant les résultats obtenus aux n°s 4, 6, 16, 18, on parvient sans peine aux conclusions suivantes :

1° $m < \frac{e^{3n\lambda\pi}}{2n\lambda}$. — Il y a un point α_0 , compris entre les points

S et B' , dont l'ordonnée est minimum, et un point β_0 , compris entre les points B' et A'_0 , dont l'ordonnée est maximum, ce qui, avec le point W_0 , donne un total de trois points où la tangente est parallèle à l'axe des X. Il existe d'ailleurs trois points d'inflexion : β_1 entre A_0 et B, α_1 entre S et B' , et le point A'_0 . C'est le cas de la figure 1 ;

2° $m = \frac{e^{3n\lambda\pi}}{2n\lambda}$. — Les mêmes choses subsistent, si ce n'est que

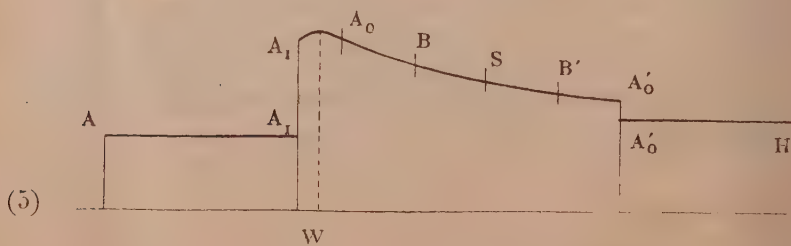
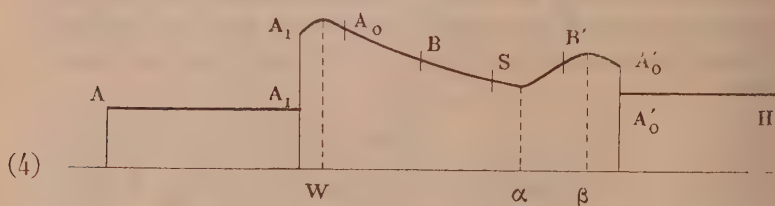
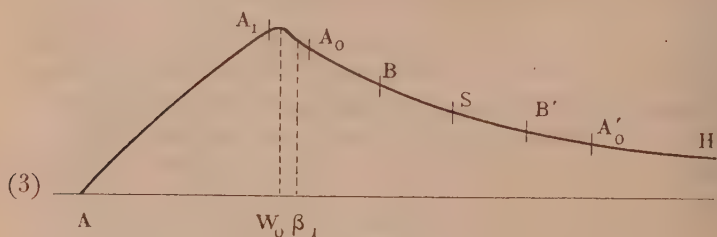
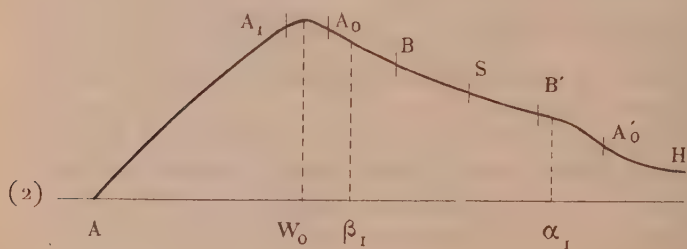
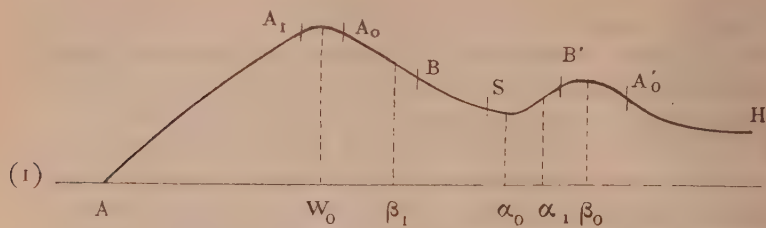
les trois points α_0 , β_0 et α_1 sont venus se confondre avec le point B' , qui est ainsi un point d'inflexion, où la tangente est parallèle à l'axe des X, mais non pas un point de maximum ou de minimum ;

3° $\frac{e^{3n\lambda\pi}}{2n\lambda} < m < \frac{1}{4n^2\lambda^2}$. — Les points α'_0 et β_0 n'existent plus et

le point W_0 est le seul où la tangente soit horizontale. Le point d'inflexion α_1 s'est déplacé à droite et est maintenant entre B' et A'_0 . C'est le cas de la figure 2 ;

4° $m = \frac{1}{4n^2\lambda^2}$. — Les mêmes choses subsistent, si ce n'est que

le point d'inflexion β_1 qui, jusqu'à présent, était entre A_0 et B, est ici en A_0 ;



5° $\frac{1}{4n^2\lambda^2} < m < \frac{e^{4n\lambda\pi}}{4n^2\lambda^2}$. — Le point d'inflexion β , s'est encore déplacé vers la gauche, et il est désormais entre W_0 et A_0 ; les deux autres, α_1 et A'_0 , subsistent toujours, α_1 entre B' et A'_0 .

6° $m = \frac{e^{4n\lambda\pi}}{4n^2\lambda^2}$. — Le point α_1 est venu se confondre avec le point A'_0 , qui cesse par conséquent d'être un point d'inflexion;

7° $\frac{e^{4n\lambda\pi}}{4n^2\lambda^2} < m$. — Le point α_1 n'existe plus, et, comme dans le cas précédent, la courbe ne possède d'autre point d'inflexion que le point β , entre W_0 et A_0 . C'est le cas de la figure 3.

24. Représentons maintenant la variation de N , en construisant la ligne dont les ordonnées sont les valeurs, toujours positives, de cette réaction.

Nous savons déjà que, quel que soit m , cette ligne comporte deux parties rectilignes parallèles à l'axe des X , l'une d'ordonnée $p \cos i$, limitée aux points A et A_1 , l'autre d'ordonnée p , commençant au point A'_0 . Nous savons aussi que, quel que soit m , l'ordonnée augmente brusquement au point A_1 , diminue subitement au point A'_0 et croît toujours (n° 17) depuis le point A_1 jusqu'à un certain point W , compris entre A_1 et A_0 , où elle est maximum.

Quant à la forme de la courbe entre les points W et A'_0 , elle dépend de la valeur de m , qui peut occuper un rang quelconque dans la suite croissante (45). En se reportant aux n°s 5 et 17, on voit que les conclusions sont les suivantes :

1° $m < \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$. — Il existe un point α compris entre les points S et B' , dont l'ordonnée est minimum, et un point β , entre B' et A'_0 , dont l'ordonnée est maximum, ce qui, avec le point W , donne trois points où la tangente est horizontale. On a ainsi la figure 4. Au point de vue de la variation correspondante de V et de T , on peut d'ailleurs se trouver dans le premier, dans le deuxième ou dans le troisième cas du numéro précédent.

2° $m = \frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi}$. — Le point de minimum α , au lieu d'être compris entre S et B' , coïncide avec le point B' ;

3° $\frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi} < m < b$. — Le point α a encore avancé et se trouve actuellement entre B' et A'_0 , comme le point de maximum β .

4° $m = b$. — Les points α et β de minimum et de maximum se confondent ici en un seul point ζ , situé entre B' et A'_0 , de sorte que l'ordonnée est constamment décroissante depuis le point W jusqu'au point A'_0 et le point ζ est un point d'inflexion où la tangente est horizontale. En ce qui concerne la variation associée de V et de T , c'est le troisième cas du n° 23 qui répond à notre cas actuel, comme aux deux précédents.

5° $b < m$. — Les points α et β n'existent plus et l'ordonnée décroît encore constamment entre W et A'_0 , mais sans que la courbe ait d'autre tangente horizontale que celle du point W . Elle est représentée par la figure 5. On peut d'ailleurs se trouver, au point de vue de la variation corrélatrice de V et de T , dans l'un quelconque des cinq derniers cas du n° 23, ainsi que le montrent les inégalités (45).

VIII.

25. Il reste à déterminer le temps Θ que met le disque à boucler la boucle. J'entends par là le temps qui s'écoule entre l'instant où il touche la piste au point A et l'instant où, sortant de la circonférence, il touche la piste au point A'_0 .

On calculera successivement le temps employé par le disque pour descendre le plan incliné AA_1 , puis le temps qu'il met à descendre l'arc A_1A_0 et enfin la durée de sa révolution sur la circonférence.

La première durée se trouve aisément, car l'expression de la vitesse sur le plan incliné (n° 13) donne :

$$\sqrt{\frac{p \sin i}{\lambda}} g dt = \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{-\frac{4\lambda}{3pg}x}}}$$

que l'on intègre facilement. On obtient ainsi pour la première durée

$$(46) \quad t_1 = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{p}{\lambda \sin i}} \log \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{4\lambda}{3pg}D}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-\frac{4\lambda}{3pg}D}}}.$$

Pour calculer le second intervalle de temps t_2 , on a la formule

$$V = - (R - r) \frac{du}{dt},$$

qui donne

$$(47) \quad t_2 = \int_0^i \frac{R-r}{V} du,$$

où V a la valeur (36). On pourra employer la méthode des trapèzes, en prenant pour sommet de l'un d'eux le point W_0 qui répond au minimum de $\frac{R-r}{V}$.

Enfin, le temps t_3 que met le disque à parcourir la circonférence est

$$(48) \quad t_3 = \int_0^{2\pi} \frac{R-r}{V} du,$$

se déduisant de (47) par le changement de λ en $-\lambda$ et de i en 2π . On le calculera par des procédés analogues.

26. Lorsqu'on fait abstraction de la résistance du milieu, les formules (46), (47), (48) sont remplacées par les suivantes :

$$t_1 = \sqrt{\frac{3D}{g \sin i}},$$

$$t_2 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{np}{2}} \int_0^i \frac{du}{\sqrt{m + \cos u}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{np}{2m}} \int_0^i (1 + \varepsilon \cos u)^{-\frac{1}{2}} du,$$

$$t_3 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{np}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{du}{\sqrt{m + \cos u}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{np}{2m}} \int_0^{2\pi} (1 + \varepsilon \cos u)^{-\frac{1}{2}} du,$$

m ayant ici pour valeur

$$(49) \quad m = \frac{V_0^2}{2np g^2} - 1$$

et ε désignant la quantité $\frac{1}{m}$, qui est inférieure à l'unité. On peut

alors développer $(1 + \varepsilon \cos u)^{-\frac{1}{2}}$ par la formule du binôme et il vient ainsi :

$$(1 + \varepsilon \cos u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \cos u + \frac{1.3}{2.4} \varepsilon^2 \cos^2 u - \frac{1.3.5}{2.4.6} \varepsilon^3 \cos^3 u \\ + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \varepsilon^4 \cos^4 u - \dots,$$

c'est-à-dire, en remplaçant les puissances de $\cos u$ par leurs expressions en fonction des cosinus des multiples de u :

$$(1 + \varepsilon \cos u)^{-\frac{1}{2}} = C_0 - C_1 \cos u + C_2 \cos 2u - C_3 \cos 3u \\ + C_4 \cos 4u - \dots,$$

où l'on a :

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 + \frac{1}{2} \frac{1.3}{2.4} \varepsilon^2 + \frac{3}{8} \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \varepsilon^4 + \dots \\ C_1 &= \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{3}{4} \frac{1.3.5}{2.4.6} \varepsilon^3 + \dots \\ (50) \quad C_2 &= \frac{1}{2} \frac{1.3}{2.4} \varepsilon^2 + \frac{4}{8} \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \varepsilon^4 + \dots \\ C_3 &= \frac{1}{4} \frac{1.3.5}{2.4.6} \varepsilon^3 + \dots \\ C_4 &= \frac{1}{8} \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \varepsilon^4 + \dots \end{aligned}$$

On en conclut :

$$\int_0^u (1 + \varepsilon \cos u)^{-\frac{1}{2}} du = C_0 u - C_1 \sin u + \frac{C_2}{2} \sin 2u - \frac{C_3}{3} \sin 3u \\ + \frac{C_4}{4} \sin 4u - \dots$$

Les temps que met le disque à parcourir la droite AA_1 , l'arc A_1A_0 et la circonférence sont donc respectivement :

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt{\frac{3D}{g \sin i}}, \\ (51) \quad t_2 &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{np}{2m}} \left(C_0 i - C_1 \sin i + \frac{C_2}{2} \sin 2i - \frac{C_3}{3} \sin 3i + \dots \right), \\ t_3 &= 3\pi \sqrt{\frac{np}{2m}} C_0. \end{aligned}$$

DEUXIÈME PARTIE

APPLICATION

On va faire une application numérique de la théorie qui précède.
Je supposerai la boucle définie par les dimensions suivantes :

$$R = 3^m,50, \quad D = 34 \text{ mètres,}$$

la différence d'altitude des points A et A₁ étant de 14 mètres. L'angle désigné par i est donc tel que l'on a :

$$\sin i = \frac{7}{17} \text{ ou } \operatorname{tg} i = \frac{7\sqrt{15}}{60},$$

ce qui donne

$$i = 24^{\circ} 19',$$

ou plus exactement

$$i = 24^{\circ} 18' 56''.$$

Le disque aura 1^m,20 de rayon et pèsera 100 kilogr.

$$r = 1^m,20, \quad p = 100 \text{ kilogr.}$$

Le rayon de la circonférence décrite par le centre du disque à l'intérieur de la boucle sera ainsi :

$$R - r = 2^m,30.$$

On a d'ailleurs

$$g = 9^m,81, \quad \lambda = 3^m,85.$$

Calculons tout de suite quelques nombres qui vont être utiles.
On trouve facilement :

$$n = \frac{2(R - r)}{3pg} = 0,00156,$$

$$2n = 0,00312,$$

$$n\lambda = 0,006006,$$

$$2n\lambda = 0,012012,$$

$$4n^2\lambda^2 = 0,000144288,$$

$$g^2 = 96,2361,$$

$$2npg^2 = 30,0256632,$$

$$\frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} = 30,021\,66,$$

$$\frac{4n^2\lambda^2 + 1}{2npg^2} = 0,033\,309,$$

$$\mu = \frac{12n^2\lambda^2 + 7}{4} = 1,750\,108,$$

$$n\lambda\pi = 0,018\,868,$$

$$\frac{1}{2n\lambda} = 83,2501, \quad e^{n\lambda\pi} = 1,019,$$

$$\frac{\mu}{2n\lambda} = 145,6875, \quad e^{2n\lambda\pi} = 1,038,$$

$$\frac{1}{4n^2\lambda^2} = 6\,930,5812, \quad e^{3n\lambda\pi} = 1,058,$$

$$\frac{\mu}{4n^2\lambda^2} = 12\,128,5171 \quad e^{4n\lambda\pi} = 1,078,$$

$$\mu e^{2n\lambda\pi} = 1,8166,$$

$$\frac{1}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi} = 88,0786,$$

$$\frac{\mu}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi} = 154,1374,$$

$$\frac{1}{4n^2\lambda^2} e^{4n\lambda\pi} = 7471,1665,$$

$$\frac{\mu}{4n^2\lambda^2} e^{4n\lambda\pi} = 13\,074,5415.$$

Valeur de la vitesse V_1 . — Elle est donnée par la formule (29).
Or on a

$$pg^2 = 9623,61,$$

$$\sin i = \frac{7}{17},$$

$$\lambda = 3,85,$$

qui donnent

$$\frac{pg^2 \sin i}{\lambda} = 1\,029,2631.$$

On a ensuite

$$4\lambda = 15,40,$$

$$D = 34,$$

$$3pg = 2\,943,$$

qui donnent

$$\frac{4\lambda}{3pg} D = 0,17791$$

et par suite

$$\log e^{-\frac{4\lambda}{3pg} D} = -0,17791 \times 0,4343 = -0,077337.$$

D'où

$$e^{-\frac{4\lambda}{3pg} D} = 0,83701,$$

$$1 - e^{-\frac{4\lambda}{3pg} D} = 0,16299.$$

On en conclut :

$$V_1 = 167,7596,$$

$$V_1 = 12,95.$$

En arrivant au bas du plan incliné, le centre du disque possède donc une vitesse de $12^m,95$ par seconde, c'est-à-dire de $46^{km},620$ à l'heure. La valeur absolue de la vitesse angulaire est alors

$$\frac{V_1}{r} = \frac{12,95}{1,20} = 10,79,$$

de sorte que le disque fait $1^{tour},72$ par seconde.

Valeur de la vitesse V_0 . — Elle se déduit de la formule (30).

Comme on a

$$i = 24^{\circ} 19',$$

il vient

$$\cos i = 0,911$$

$$2n\lambda \sin i = 0,00494$$

$$2n\lambda i = 0,00509$$

$$e^{2n\lambda i} = 1,00510$$

$$\frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (e^{2n\lambda i} - \cos i - 2n\lambda \sin i) = 2,6768$$

$$V_0 \times 1,00510 = 170,4364.$$

On en conclut :

$$V_0 = 169,5715$$

$$V_0 = 13,02.$$

Lorsque le disque arrive au bas de l'arc A_1A_0 , son centre possède donc une vitesse de $13^m,02$ par seconde, soit de $46^{km},872$ à l'heure. La valeur absolue de sa vitesse angulaire est alors $10,85$.

Conditions (10) et (15). --- La condition (10) est satisfaite, car on a

$$\frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (1 + e^{2n\lambda\pi}) = 61,1841.$$

Si donc le roulement était imposé comme liaison, si en outre cette liaison était bilatérale, la vitesse V_0 a une valeur bien supérieure à celle qui est nécessaire pour que le disque boucle la boucle.

Mais la condition (15) est aussi satisfaite. On a en effet

$$a = \frac{\sqrt{36n^2\lambda^2 + 49}}{4} e^{2n\lambda\gamma},$$

γ étant l'angle compris entre 180° et 270° qui est défini par l'égalité

$$\lg \gamma = \frac{6n\lambda}{7}.$$

Or, on trouve sans peine

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ 17' 42'' \\ e^{2n\lambda\gamma} &= 1,039 \\ \frac{\sqrt{36n^2\lambda^2 + 49}}{4} &= 1,75.\end{aligned}$$

On en conclut :

$$a = 1,8183$$

et par suite

$$\frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1} (1 + a) = 84,6100,$$

valeur qui est inférieure à celle de V_0^2 . La condition (15) est donc bien aussi vérifiée, de sorte que, si le roulement était encore imposé comme liaison, mais cette liaison étant unilatérale, le disque bouclerait encore la boucle.

La quantité désignée par m , qui permet de remplacer les inégalités (10) et (15) par (9) et (14), est d'ailleurs donnée par la formule (3) et on trouve

$$m = 4,6482.$$

Il va de soi que les conditions (41), (42) et (43) sont satisfaites, puisque, d'après le n° 21, elles équivalent à $m > a$. On voit bien,

en particulier, que la condition (43) ou $n\lambda < \varphi$ est vérifiée, φ étant supérieur à 0,10 et $n\lambda$ étant moindre que 0,007.

Condition de roulement. — En réalité, la piste n'est pas parfaitement rugueuse et le disque ne roule pas nécessairement. Il faut supposer un coefficient de frottement suffisamment grand. D'après ce qui a été expliqué au n° 21, il faut et il suffit que f surpasse le plus grand des deux nombres $\frac{\text{tg } i}{3}$ et F . Or il est facile de voir que c'est le premier qui est le plus grand.

On a, en effet, ici :

$$\frac{\text{tg } i}{3} = \frac{7\sqrt{15}}{180} = 0,1506\dots$$

Or, considérons les deux courbes du n° 10 et calculons les ordonnées $Ae^{2n\lambda u_1}$ et $Be^{2n\lambda u_2}$ qui répondent à l'abscisse $f = 0,1$. On obtient :

$$\begin{aligned} A &= 3,06, & e^{2n\lambda u_1} &= 1,03, \\ B &= 2,91, & e^{2n\lambda u_2} &= 1,05, \end{aligned}$$

qui donnent

$$Ae^{2n\lambda u_1} = 3,15, \quad Be^{2n\lambda u_2} = 3,06.$$

Ces deux ordonnées sont moindres que m et, par suite, il en est de même *a fortiori* des deux ordonnées qui répondent à l'abscisse $f = \frac{\text{tg } i}{3}$, supérieure à 0,1. Donc le nombre $\frac{\text{tg } i}{3}$ est évidemment supérieur à l'abscisse désignée par F .

Il résulte de là que, pour qu'il y ait roulement sur toute l'étendue de la piste, avec les données numériques proposées, il faut et il suffit que l'on ait

$$f > \frac{7\sqrt{15}}{180},$$

c'est-à-dire que le disque roule au départ. Je supposerai qu'il en est ainsi.

Calcul de la variation de V . — La vitesse V du centre du disque commence par croître jusqu'en un point $u = u_0$, intérieur à l'arc A_1A_0 , où elle est maximum, puis elle décroît; comme m est moindre que $\frac{1}{2n\lambda} e^{3n\lambda\pi} = 88,079$, V cesse de décroître à partir

d'un point $u = \alpha_0$, compris entre S et B', où il est minimum; V croît ensuite jusqu'en un point $u = \beta_0$, compris entre B' et A', où il est maximum; enfin la vitesse décroît de β_0 en A' et au delà. C'est le cas de la figure 1 du n° 23.

Pour calculer chaque maximum et le minimum, j'utiliserai l'angle de 41' 18" tel que l'on a

$$2n\lambda = \operatorname{tg}(41' 18").$$

Calculons d'abord le premier maximum. L'angle w_0 est l'angle aigu qui satisfait à l'équation

$$2n\lambda m e^{2n\lambda u} - \sin u + 2n\lambda \cos u = 0.$$

Elle s'écrit :

$$\sin(u - 41' 18") - 0,0557961 e^{2n\lambda u} = 0,$$

ou encore

$$\sin(u - 41' 18") - l^{2n\lambda u} \sin(3^\circ 11' 55") = 0.$$

Une valeur approchée de u est donc :

$$\begin{aligned} u - 41' 18" &= 3^\circ 11' 55" \\ u &= 3^\circ 53' 13", \end{aligned}$$

et, substituée dans le premier membre, elle donne évidemment le signe —. Au contraire, la valeur

$$u = 3^\circ 53' 30"$$

donne le signe +, car on obtient :

$$\begin{aligned} \log \sin(u - 41' 18") &= \bar{2},747\,2532, \\ \log(0,0557961 e^{2n\lambda u}) &= \bar{2},746\,8956. \end{aligned}$$

La racine w_0 est donc comprise entre $3^\circ 53' 13''$ et $3^\circ 53' 30''$. Adoptons la valeur

$$w_0 = 3^\circ 53' 30''.$$

Le maximum de V^2 est alors :

$$\begin{aligned} V^2 &= \frac{pg^2}{\lambda} \sin w_0 = 2\,500 \sin(3^\circ 53' 30''), \\ V^2 &= 169,675. \end{aligned}$$

D'où :

$$V = 13^m, 03.$$

Calculons maintenant le minimum.

Si l'on pose $\alpha_0 = 180^\circ + x$, l'angle x appartient au 1^{er} quadrant et est donné par l'équation

$$2n\lambda m e^{-2n\lambda\pi} e^{-2n\lambda x} 2n\lambda \cos x - \sin x = 0$$

qui s'écrit :

$$e^{2n\lambda x} \sin(x + 41' 18'') - 0,053 7532 = 0,$$

ou encore :

$$e^{2n\lambda x} \sin(x + 41' 18'') - \sin(3^\circ 4' 53'') = 0.$$

Une valeur approchée de x est donc :

$$\begin{aligned} x + 41' 18'' &= 3^\circ 4' 53'' \\ x &= 2^\circ 23' 35'' \end{aligned}$$

et, substituée dans le premier membre, elle donne évidemment le signe +. Au contraire, la valeur

$$x = 2^\circ 23'$$

donne le signe —, car on obtient :

$$e^{2n\lambda x} \sin(x + 41' 18'') = 0,053 6118.$$

La racine x est donc comprise entre $2^\circ 23'$ et $2^\circ 23' 35''$. J'adopterai la valeur

$$x = 2^\circ 23'$$

qui donne :

$$\alpha_0 = 182^\circ 23'.$$

Le minimum de V^2 est alors :

$$V^2 = \frac{pg^2}{\lambda} \sin x = 2 500 \sin(2^\circ 23'),$$

c'est-à-dire :

$$V^2 = 103,975.$$

D'où :

$$V = 10^m, 19.$$

Calculons enfin le second maximum. Si l'on pose $\beta_0 = 360^\circ - \varepsilon$, l'angle ε appartient au 1^{er} quadrant et est donné par l'équation

$$2n\lambda m e^{-4n\lambda\pi} e^{2n\lambda\varepsilon} + 2n\lambda \cos \varepsilon - \sin \varepsilon = 0,$$

qui s'écrit :

$$\sin(\varepsilon - 41' 18'') - 0,0517588 e^{2n\lambda\varepsilon} = 0,$$

ou encore :

$$\sin(\varepsilon - 41' 18'') - e^{2n\lambda\varepsilon} \sin(2^\circ 58' 1'') = 0.$$

Une valeur approchée de ε est donc :

$$\begin{aligned}\varepsilon - 41' 18'' &= 2^\circ 58' 1'' \\ \varepsilon &= 3^\circ 39' 19''\end{aligned}$$

et, substituée dans le premier membre, elle donne évidemment le signe —. Au contraire, la valeur

$$\varepsilon = 3^\circ 40'$$

donne le signe +, car on obtient :

$$\begin{aligned}\log \sin(\varepsilon - 41' 18'') &= \bar{2},7156551 \\ \log(0,0517588 e^{2n\lambda\varepsilon}) &= \bar{2},7143184.\end{aligned}$$

La racine ε est donc comprise entre $3^\circ 39' 19''$ et $3^\circ 40'$. J'adopterai la valeur

$$\varepsilon = 3^\circ 40'$$

qui donne :

$$\beta_0 = 356^\circ 20'.$$

Le maximum de V^2 est alors :

$$\begin{aligned}V^2 &= \frac{pg^2}{\lambda} \sin \varepsilon = 2500 \sin(3^\circ 40') \\ V^2 &= 159,875.\end{aligned}$$

D'où :

$$V = 12^m,64.$$

Les valeurs de V^2 en B, S, B' et Λ'_0 s'obtiennent d'ailleurs en multipliant par $\frac{2npg^2}{4n^2\lambda^2 + 1}$ les binômes

$$me^{-n\lambda\pi} - 2n\lambda, \quad me^{-2n\lambda\pi} - 1, \quad me^{-3n\lambda\pi} + 2n\lambda, \quad me^{-4n\lambda\pi} + 1.$$

On trouve ainsi respectivement, pour les points B, S, B' et A₀ :

$$\begin{array}{ll} V^2 = 136,579 & V = 11^m,69 \\ V^2 = 104,310 & V = 10^m,21 \\ V^2 = 132,229 & V = 11^m,50 \\ V_0^2 = 159,330 & V_0 = 12^m,62 \end{array}$$

Les valeurs principales de V sont donc les suivantes :

Au point A	V = 0
— A ₁	V ₁ = 12 ^m ,95
— w ₀	V = 13 ^m ,03
— A ₀	V ₀ = 13 ^m ,02
— B	V = 11 ^m ,69
— S	V = 10 ^m ,21
— α ₀	V = 10 ^m ,19
— B'	V = 11 ^m ,50
— β ₀	V = 12 ^m ,64
— A' ₀	V = 12 ^m ,62

Calcul de la variation de N. — Tant que le disque est sur la droite AA₁, la réaction normale N conserve la valeur

$$N = p \cos i = 91^{\text{kg}},13.$$

Au moment où il franchit le point A₁, N passe brusquement de cette valeur à la valeur

$$p \cos i + \frac{2 V_1^2}{3 n g^2},$$

qui est égale à 836^{kg},10. Puis N augmente jusqu'en un point $u = w$, précédant le point A₁, pour décroître au delà. Comme m est inférieur à

$$\frac{\mu}{2 n \lambda} e^{3 n \lambda \pi} = 154,137,$$

N décroît jusqu'à un certain minimum, qu'il atteint en un point $u = \alpha$, compris entre S et B'; N augmente ensuite jusqu'en un point $u = \beta$, compris entre B' et A₀, où il est maximum; enfin N diminue de β en A'₀, où il passe brusquement de la valeur

$$p + \frac{2 V_0^2}{3 n g^2},$$

qui est égale à $808^{\text{kg}},13$, à la valeur $p = 100$ kilogr., qu'il conserve sur A_0H . C'est le cas de la figure 4 du n° 24. Le minimum est positif, puisque m surpasse a .

J'utiliserai l'angle de

$$0^{\circ} 23' 34'',40$$

qui est tel que sa tangente est égale à $\frac{2n\lambda}{\mu}$.

Calculons d'abord le premier maximum. L'angle w est l'angle aigu qui vérifie l'équation

$$2n\lambda m e^{2n\lambda u} - \mu \sin u + 2n\lambda \cos u = 0.$$

Elle s'écrit :

$$\sin(u - 23' 34'',40) - 0,0318855 e^{2n\lambda u} = 0,$$

ou encore :

$$\sin(u - 23' 34'',40) - e^{2n\lambda u} \sin(1^{\circ} 49' 37'',97) = 0.$$

Une valeur approchée de u est donc :

$$\begin{aligned} u - 23' 34'',40 &= 1^{\circ} 49' 37'',97 \\ u &= 2^{\circ} 13' 12'',37, \end{aligned}$$

et, substituée dans le premier membre, elle donne évidemment le signe $-$. Au contraire, la valeur

$$u = 2^{\circ} 13' 30''$$

donne le signe $+$, car on obtient :

$$\begin{aligned} \log \sin(u - 23' 34'',40) &= \bar{2},5047552, \\ \log(0,0318855 e^{2n\lambda u}) &= \bar{2},5037958. \end{aligned}$$

La racine w est donc comprise entre $2^{\circ} 13' 12'',37$ et $2^{\circ} 13' 30''$. J'adopterai la valeur

$$w = 2^{\circ} 13' 30''.$$

Le maximum de N est alors :

$$N = p \left(\frac{7 \sin w}{6n\lambda} + \cos w \right).$$

Comme on a :

$$\begin{aligned} \sin w &= 0,038824, \\ \cos w &= 0,999246, \end{aligned}$$

on en déduit pour ce maximum :

$$N = 854^{\text{kg}}, 08.$$

Calculons maintenant le minimum. Si l'on pose $\alpha = 180^\circ + x$, l'angle x appartient au 1^{er} quadrant et est donné par l'équation

$$2n\lambda m e^{-2n\lambda\pi} e^{-2n\lambda x} - 2n\lambda \cos x - \mu \sin x = 0,$$

qui s'écrit :

$$e^{2n\lambda x} \sin(x + 23'34'',40) - 0,0307182 = 0,$$

ou encore :

$$e^{2n\lambda x} \sin(x + 23'34'',40) - \sin(1^\circ45'37'',08) = 0.$$

Une valeur approchée de x est donc :

$$\begin{aligned} x + 23'34'',40 &= 1^\circ45'37'',08 \\ x &= 1^\circ22'2'',68 \end{aligned}$$

et, substituée dans le premier membre, elle donne évidemment le signe +. Au contraire, la valeur

$$\begin{aligned} x + 23'34'',40 &= 1^\circ45' \\ x &= 1^\circ21'25'',60 \end{aligned}$$

donne le signe —, car on obtient :

$$e^{2n\lambda x} \sin(x + 23'34'',40) = 0,0305492.$$

La racine x est donc comprise entre

$$1^\circ21'25'',60 \quad \text{et} \quad 1^\circ22'2'',68.$$

J'adopterai la valeur

$$x = 1^\circ21'$$

qui donne :

$$\alpha = 181^\circ21'.$$

Le minimum de N est alors :

$$N = p \left(\frac{7 \sin x'}{6n\lambda} - \cos x' \right),$$

c'est-à-dire :

$$N = 358^{\text{kg}}, 14,$$

car on a :

$$\sin(1^\circ21') = 0,02356, \quad \cos(1^\circ21') = 0,99972.$$

Calculons enfin le second maximum. Si l'on pose $\beta = 360^\circ - \varepsilon$, l'angle ε appartient au 1^{er} quadrant et est donné par l'équation

$$2n\lambda m e^{-4n\lambda\pi} e^{2n\lambda\varepsilon} + 2n\lambda \cos \varepsilon - \mu \sin \varepsilon = 0,$$

qui s'écrit :

$$\sin(\varepsilon - 23' 34'', 40) - 0,0295784 e^{2n\lambda\varepsilon} = 0,$$

ou encore :

$$\sin(\varepsilon - 23' 34'', 40) - e^{2n\lambda\varepsilon} \sin(1^\circ 41' 41'', 87) = 0.$$

Une valeur approchée de ε est donc :

$$\begin{aligned}\varepsilon - 23' 34'', 40 &= 1^\circ 41' 41'', 87 \\ \varepsilon &= 2^\circ 5' 16'', 27\end{aligned}$$

et, substituée dans le premier membre, elle donne évidemment le signe —. Au contraire, la valeur

$$\varepsilon = 2^\circ 6'$$

donne le signe +, car on obtient :

$$\begin{aligned}\log \sin(\varepsilon - 23' 34'', 40) &= \bar{2},4740749, \\ \log(0,0295784 e^{2n\lambda\varepsilon}) &= \bar{2},4709747.\end{aligned}$$

La racine ε est donc comprise entre

$$2^\circ 5' 16'', 27 \quad \text{et} \quad 2^\circ 6'.$$

Nous adopterons la valeur

$$\varepsilon = 2^\circ 5'$$

qui donne :

$$\beta = 357^\circ 54'.$$

Le maximum de N est alors :

$$N = p \left(\frac{7 \sin \varepsilon}{6n\lambda} + \cos \varepsilon \right),$$

c'est-à-dire :

$$N = 812^{\text{kg}}, 38,$$

car on a :

$$\sin(2^\circ 6') = 0,03664, \quad \cos(2^\circ 6') = 0,99933.$$

Les valeurs de la réaction normale au point A₃ et au sommet S sont d'ailleurs :

$$N = p + \frac{2V_0^2}{3ng^2},$$

$$N = -p + \frac{2V^2}{3ng^2},$$

qui donnent respectivement :

$$N = 853^{\text{kg}}, 64, \quad N = 363^{\text{kg}}, 60.$$

Les valeurs principales de N sont donc les suivantes :

Sur AA_1	$N = 91^{\text{kg}}, 13$
Au point A_1	$N = 91^{\text{kg}}, 13$ et $N = 836^{\text{kg}}, 10$
— w	$N = 854^{\text{kg}}, 08$
— A_0	$N = 853^{\text{kg}}, 64$
— S	$N = 363^{\text{kg}}, 60$
— α	$N = 358^{\text{kg}}, 14$
— β	$N = 812^{\text{kg}}, 38$
— A_0'	$N = 808^{\text{kg}}, 13$ et $N = 100^{\text{kg}}$
Sur $A_0'H$	$N = 100^{\text{kg}}$.

Calcul de la variation de T . — Au départ du disque en A , la réaction tangentielle a pour valeur :

$$T = -\frac{P}{3} \sin i = -13^{\text{kg}}, 73.$$

Puis T décroît en valeur absolue, c'est-à-dire croît, et au point A_1 on a :

$$T = -\frac{P}{3} \sin i + \frac{\lambda V_1^2}{3g^2} = -\frac{P}{3} \sin i e^{-\frac{4\lambda}{3\rho g} D} = -11^{\text{kg}}, 49.$$

Comme m est moindre que $\frac{1}{4n^2\lambda^2}$, T continue à croître jusqu'au point A_0 , où il prend la valeur positive

$$T = \frac{\lambda V_0^2}{3g^2} = 2^{\text{kg}}, 26;$$

T s'est en effet annulé au point $u = w_0$, où la vitesse V est maximum. En raison toujours de ce que m est inférieur à $\frac{1}{4n^2\lambda^2}$,

T augmente encore au delà du point A_0 , ainsi qu'on l'a vu au n° 6, et, en un point $u = \beta_1$ précédant le point B , T atteint un maximum. Mais, étant donné que m est moindre que $\frac{e^{4n\lambda\pi}}{4n^2\lambda^2}$, T ne

diminue ensuite que jusqu'en un point $u = \alpha_1$, où il est minimum, et, comme m est inférieur à $\frac{e^{3n\lambda\pi}}{2n\lambda}$, ce minimum est négatif et le point α_1 compris entre S et B', T s'annulant aux deux points α_0 et β_0 de minimum et de maximum de la vitesse V. Au delà du point α_1 , T croît jusqu'à sa valeur positive en A'.

$$T = \frac{\lambda V_0'^2}{3g^2} = 2^{kg, 12}.$$

Enfin, à partir du point A'_0, la réaction T décroît sur A'_0H, de sorte que sa valeur en A'_0 est un second maximum.

Nous sommes dans le cas de la figure 1 du n° 23, où le coefficient angulaire de la tangente à la courbe donne la variation de T : cette courbe a trois points w_0 , α_0 , β_0 où la tangente est horizontale (tension nulle) et trois points d'inflexion β_1 , α_1 et A'_0 (tension maximum ou minimum).

Il reste à calculer le minimum et le premier maximum de T. Pour cela, j'utiliserai encore l'angle de 41' 18" dont la tangente est $2n\lambda$.

Calculons d'abord le maximum. L'angle β_1 est l'angle aigu qui satisfait à l'équation

$$4n^2\lambda^2 m e^{-2n\lambda u} + 2n\lambda \sin u - \cos u = 0,$$

qui s'écrit :

$$e^{2n\lambda u} \cos(u + 41' 18'') = 0,000 6696 = 0.$$

ou encore :

$$e^{2n\lambda u} \cos(u + 41' 18'') - \cos(89^\circ 57' 42'') = 0.$$

Une valeur approchée de u est donc :

$$\begin{aligned} u + 41' 18'' &= 89^\circ 57' 42'', \\ u &= 89^\circ 16' 24'', \end{aligned}$$

et, substituée dans le premier membre, elle donne évidemment le signe +. Au contraire, la valeur

$$u = 89^\circ 17'$$

donne le signe —, car on obtient :

$$e^{2n\lambda u} \cos(u + 41' 18'') = 0,000 5038.$$

La racine β_1 est donc comprise entre $89^\circ 16' 24''$ et $89^\circ 17'$. Nous adopterons la valeur

$$\beta_1 = 89^\circ 16' 24''.$$

Le maximum de T est alors :

$$T = \frac{p}{6n\lambda} \cos \beta_1,$$

c'est-à-dire :

$$T = 35^{\text{kg}}, 22,$$

car on a :

$$\cos (89^\circ 16' 24'') = 0,01268.$$

Calculons maintenant le minimum. Si l'on pose $\alpha_1 = 180^\circ + y$, l'angle y appartient au 1^{er} quadrant et est donné par l'équation

$$4n^2\lambda^2 m e^{-2n\lambda\pi} e^{-2n\lambda y} - 2n\lambda \sin y + \cos y = 0,$$

qui s'écrit :

$$e^{2n\lambda y} \cos (y + 41' 18'') + 0,0006450 = 0,$$

ou encore :

$$e^{2n\lambda y} \cos (179^\circ 18' 42'' - y) - 0,0006450 = 0,$$

ou enfin :

$$e^{2n\lambda y} \cos (179^\circ 18' 42'' - y) - \cos (89^\circ 57' 47'') = 0.$$

Une valeur approchée de y est donc :

$$\begin{aligned} 179^\circ 18' 42'' - y &= 89^\circ 57' 47'', \\ y &= 89^\circ 20' 55'' \end{aligned}$$

et, substituée dans le premier membre, elle donne évidemment le signe +. Au contraire, la valeur

$$y = 89^\circ 20'$$

donne le signe —, car on obtient :

$$e^{2n\lambda y} \cos (179^\circ 18' 42'' - y) = 0,0003853.$$

La racine y est donc comprise entre $89^\circ 20'$ et $89^\circ 20' 55''$. J'adopterai la valeur

$$y = 89^\circ 20',$$

qui donne :

$$\alpha_1 = 269^\circ 20'.$$

Le minimum de T est alors :

$$T = -\frac{P}{6n\lambda} \cos y,$$

c'est-à-dire :

$$T = -32^{\text{kg}}, 33,$$

car on a :

$$\cos(89^\circ 20') = 0,01164.$$

Les valeurs de T aux points B et B' sont d'ailleurs respectivement

$$T = \frac{P}{3(4n^2\lambda^2 + 1)} (2n\lambda m e^{-n\lambda\pi} + 1) = 35^{\text{kg}}, 15,$$

$$T = \frac{P}{3(4n^2\lambda^2 + 1)} (2n\lambda m e^{-3n\lambda\pi} - 1) = -31^{\text{kg}}, 57.$$

Quant à la valeur de T au sommet S, elle est :

$$T = \frac{\lambda V^2}{3g^2} = 1^{\text{kg}}, 39.$$

Les valeurs principales de T sont donc les suivantes :

Au point A	$T = -13^{\text{kg}}, 73$
— A ₁	$T = -11^{\text{kg}}, 49$
— w ₀	$T = 0$
— A ₀	$T = 2^{\text{kg}}, 26$
— β ₁	$T = 35^{\text{kg}}, 22$
— B	$T = 35^{\text{kg}}, 15$
— S	$T = 1^{\text{kg}}, 39$
— α ₀	$T = 0$
— α ₁	$T = -32^{\text{kg}}, 33$
— B'	$T = -31^{\text{kg}}, 57$
— β ₀	$T = 0$
— A' ₀	$T = 2^{\text{kg}}, 12.$

On peut retrouver, en partant des valeurs numériques de N et de T que nous venons d'obtenir, la condition unique qui a été trouvée plus haut pour le roulement du disque. Nous avons vu en effet que, pour qu'il roule sur la piste tout entière, il faut et il

suffit que f soit supérieur à $\frac{7\sqrt{15}}{180}$ et que $fN - |T|$ soit constamment positif sur la circonférence. Or, je dis que, si la première condition est satisfaite, il en sera de même de la seconde. Effectivement, la plus petite valeur de N étant 358,14 et la plus grande valeur de $|T|$ étant 35,22, $fN - |T|$ a en tout point du cercle une valeur supérieure à $f \times 358,14 - 35,22$. Si donc f surpasse $\frac{7\sqrt{15}}{180}$, auquel cas f surpasse 0,1, comme la différence précédente est alors positive, il en sera de même de $fN - T$, pour toute valeur de u appartenant à l'intervalle $(0, 2\pi)$. Par conséquent, l'unique condition de roulement est bien :

$$f > \frac{7\sqrt{15}}{180}.$$

Calcul de la durée Θ du trajet. — Calculons d'abord le temps t_1 que met le disque à descendre le plan incliné AA_1 . Il est donné par la formule (46). Or, on a vu que l'on a :

$$1 - e^{-\frac{4\lambda}{3\rho g}D} = 0,16299.$$

On en déduit sans peine que le logarithme népérien qui figure dans la formule a pour valeur :

$$0,3718303 \times \frac{1}{M} = 0,85617.$$

D'autre part, $\lambda \sin i$ étant égal au produit de 3,85 par $\frac{7}{17}$, on a :

$$\frac{\rho}{\lambda \sin i} = \frac{1700}{26,95},$$

et par suite :

$$\sqrt{\frac{\rho}{\lambda \sin i}} = 7,9423.$$

On en conclut :

$$t_1 = \frac{3}{4} \times 7,9423 \times 0,85617 = 5^s, 10.$$

Calculons maintenant la durée t_2 de la descente sur l'arc A_1A_2 .

C'est la formule (47) qui va la donner. Elle représente l'aire comprise entre la courbe

$$y = \frac{R - r}{V},$$

l'axe des u et les deux ordonnées $u = 0$, $u = i$. Nous en aurons une valeur très approchée en la divisant en deux trapèzes à l'aide de l'ordonnée $u = w_0$ et faisant la somme de leurs aires. Or, si l'on se reporte aux valeurs numériques de la vitesse aux points $u = 0$, $u = w_0$, $u = i$, on obtient pour les bases de ces trapèzes :

$$y_0 = \frac{230}{1302} = 0,1767,$$

$$y_{w_0} = \frac{230}{1303} = 0,1765,$$

$$y_i = \frac{230}{1295} = 0,1776,$$

et par suite :

$$\frac{y_0 + y_{w_0}}{2} = 0,1766, \quad \frac{y_{w_0} + y_i}{2} = 0,1771.$$

On a d'ailleurs :

$$w_0 = 0,0679, \\ i - w_0 = 0,3565.$$

On en conclut :

$$\frac{y_0 + y_{w_0}}{2} \times w_0 = 0,0120, \\ \frac{y_{w_0} + y_i}{2} (i - w_0) = 0,0631,$$

et par conséquent :

$$t_2 = 0^s,08.$$

Cherchons enfin le temps t_3 que met le disque à parcourir la circonférence. La formule (48) montre qu'il est représenté par l'aire comprise entre la courbe

$$y = \frac{R - r}{V},$$

l'axe des u et les deux ordonnées $u = 0$, $u = 2\pi$. Pour l'évaluer, je partagerai cette aire en six trapèzes, à l'aide des ordonnées

$u = \frac{\pi}{2}$, $u = \pi$, $u = \alpha_0$, $u = \frac{3\pi}{2}$, $u = \beta_0$, et je ferai la somme de leurs aires. Or, si l'on se reporte aux valeurs de V aux points A_0 , B , S , α_0 , B' , β_0 , A'_0 , on obtient pour les bases des trapèzes :

$$y_0 = \frac{230}{1302} = 0,1767, \quad y_1 = \frac{230}{1169} = 0,1967,$$

$$y_2 = \frac{230}{1021} = 0,2253, \quad y_3 = \frac{230}{1019} = 0,2257,$$

$$y_4 = \frac{230}{1150} = 0,2000, \quad y_5 = \frac{230}{1264} = 0,1820,$$

$$y_6 = \frac{230}{1262} = 0,1823,$$

et par suite :

$$\frac{y_0 + y_1}{2} = 0,1867, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = 0,2110,$$

$$\frac{y_2 + y_3}{2} = 0,2255, \quad \frac{y_3 + y_4}{2} = 0,21285,$$

$$\frac{y_4 + y_5}{2} = 0,1910, \quad \frac{y_5 + y_6}{2} = 0,18215.$$

On a d'ailleurs pour les hauteurs

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \frac{\pi}{2} = 1,5708,$$

$$x_3 - x_2 = \alpha_0 - \pi = 0,0416,$$

$$x_4 - x_3 = \frac{3\pi}{2} - \alpha_0 = 1,5292,$$

$$x_5 - x_4 = \beta_0 - \frac{3\pi}{2} = 1,5068,$$

$$x_6 - x_5 = 2\pi - \beta_0 = 0,0640.$$

On en conclut :

$$\frac{y_0 + y_1}{2} (x_1 - x_0) + \frac{y_1 + y_2}{2} (x_2 - x_1) = 0,6247,$$

$$\frac{y_2 + y_3}{2} (x_3 - x_2) = 0,0094,$$

$$\frac{y_3 + y_4}{2} (x_4 - x_3) = 0,3255,$$

$$\frac{y_4 + y_5}{2} (x_5 - x_4) = 0,2878,$$

$$\frac{y_5 + y_6}{2} (x_6 - x_5) = 0,0117,$$

et par conséquent, en ajoutant

$$t_3 = 1^s, 26.$$

Ayant maintenant les valeurs de t_1 , t_2 et t_3 , en les additionnant, on obtient la durée Θ du trajet total :

$$\Theta = 5^s, 10 + 0^s, 08 + 1^s, 26 = 6^s, 44.$$

Il est intéressant de comparer cette durée à ce qu'elle serait si la résistance du milieu n'existait pas.

Observons avant tout que, si nous supposons λ nul, le même disque boucle encore la même boucle et avec le même coefficient de frottement. C'est en effet la formule (49) qui donne ici m et, à cause de (35), elle s'écrit :

$$m = \frac{V_1^2}{2np g^2} - \cos i.$$

Or, on a :

$$V_1^2 = \frac{4}{3} g \sin i D = 183,12,$$

D'où :

$$m = 5,1866.$$

On reconnaît alors aisément que $\frac{\lg i}{3}$ est supérieur à $\frac{1}{\sqrt{16m^2 - 49}}$ et que les conditions fixées à la fin du n° 21 se trouvent être remplies pour les valeurs numériques attribuées déjà à R , i , D , r , p et f .

Cela étant, les formules (51) font connaître t_1 , t_2 et t_3 . La première donne :

$$t_1 = \sqrt{\frac{34 \times 17}{3,27 \times 7}} = 170 \sqrt{\frac{2}{2289}} = 5^s, 03.$$

Les deux autres donneront t_2 et t_3 , car on obtient facilement :

$$\varepsilon = \frac{1}{m} = 0,1928,$$

$$\sqrt{\frac{np}{2m}} = 0,123,$$

$$\varepsilon^2 = 0,0372,$$

$$\varepsilon^3 = 0,0072,$$

$$\varepsilon^4 = 0,0014,$$

$$\varepsilon^5 = 0,0003,$$

.....

La première formule (50) donnant :

$$C_0 = 1,0071,$$

nous trouvons ainsi :

$$t_3 = 3\pi C_0 \times 0,123 = 1,159 C_0,$$

ou :

$$t_3 = 1^s, 17.$$

Mais, pour calculer t_2 , on peut calculer plus rapidement que par l'emploi de la formule (51). En effet, comme on a :

$$t_2 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{np}{2m}} \int_0^i \frac{du}{\sqrt{1 + \varepsilon \cos u}},$$

on voit que t_2 est compris entre les deux quantités

$$\frac{3}{2} \sqrt{\frac{np}{2m}} \frac{i}{\sqrt{1 + \varepsilon}}, \quad \frac{3}{2} \sqrt{\frac{np}{2m}} \frac{i}{\sqrt{1 + \varepsilon \cos i}}.$$

Or, la première a pour valeur :

$$0,184 \times 0,389 = 0,0716,$$

et la seconde :

$$0,184 \times 0,391 = 0,0719.$$

On peut donc adopter :

$$t_2 = 0^s, 07.$$

La valeur de t_3 peut d'ailleurs s'obtenir comme plus haut par la méthode des trapèzes. Décomposons l'aire de la courbe

$$y = \frac{2,30}{V}$$

en quatre trapèzes, répondant aux quatre quadrants de la circonférence. Ces trapèzes sont deux à deux équivalents et ont pour hauteur commune

$$\frac{\pi}{2} = 1,5708.$$

Or, si l'on calcule les valeurs de V aux points A_0 , B , S , B' , A'_0 , on trouve :

$$V = 13^m,63 \text{ pour } A_0 \text{ et } A'_0$$

$$V = 12^m,48 \text{ pour } B \text{ et } B'$$

$$V = 11^m,21 \text{ pour } S.$$

Les longueurs des bases sont donc :

$$\frac{230}{1363} = 0,1687, \quad \frac{230}{1248} = 0,1843, \quad \frac{230}{1121} = 0,2052,$$

pour les deux premiers trapèzes, de sorte que leurs aires ont pour valeurs :

$$0,2772, \quad 0,3059.$$

En les ajoutant, puis doublant, on a l'aire totale de la courbe

$$t_3 = 1,1662,$$

soit encore :

$$t_3 = 1^s,17,$$

comme par le premier procédé.

La durée du trajet entier du disque est par conséquent ici :

$$5^s,03 + 0^s,07 + 1^s,17 = 6^s,27,$$

au lieu de $6^s,44$ qu'elle était lorsqu'on tenait compte de la résistance $\frac{\lambda}{g^2} V^2$ appliquée au centre du disque. Cette résistance a donc pour effet d'augmenter de $0^s,17$ la durée Θ .

NOTE

Si k , m , n sont des nombres positifs et non nuls, on a toujours la double inégalité

$$(i) \quad k(mk^2 + n) < k\sqrt{m^2k^2 + n^2}e^{k\vartheta} < (mk^2 + n)e^{k\frac{\pi}{2}},$$

ϑ désignant l'angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente est :

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{m}{n} k.$$

Pour le prouver, j'introduis partout θ au lieu de k . Il s'agit alors de démontrer les deux inégalités

$$m \cos^2 \theta + n \sin^2 \theta < m \cos \theta e^{\frac{m}{n} \theta \operatorname{tg} \theta},$$

$$n \sin \theta < (m \cos^2 \theta + n \sin^2 \theta) e^{\frac{n}{m} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \operatorname{tg} \theta}.$$

Comme elles le seront *a fortiori*, si l'on établit celles qui s'en déduisent en remplaçant les exponentielles par les deux premiers termes de leurs développements, il suffit de prouver que l'on a

$$(2) \quad \cos^2 \theta + p \sin^2 \theta < \cos \theta + p \theta \sin \theta,$$

$$(3) \quad p \cos \theta' < (\sin^2 \theta' + p \cos^2 \theta') (1 + p \theta' \cotg \theta'),$$

p désignant le rapport $\frac{n}{m}$ et θ' le complément de l'angle θ .

Or, l'inégalité (2) est évidente, chaque terme du premier membre étant manifestement moindre que le terme correspondant du second. Quant à l'inégalité (3), elle résulte de l'inégalité bien visible

$$1 < \cos \theta' + \sin^2 \theta'.$$

Celle-ci montre en effet que $p \cos \theta'$ est inférieur à

$$p \cos^2 \theta' + p \sin^2 \theta' \cos \theta';$$

on a donc à plus forte raison

$$p \cos \theta' < (\sin^2 \theta' + p \cos^2 \theta') (1 + p \cos \theta'),$$

et, *a fortiori* encore, l'inégalité (3), puisque $\theta' \cotg \theta'$ est supérieur à $\cos \theta'$.

La double inégalité (1) a par conséquent lieu quelles que soient les valeurs positives des quantités k , m et n .

Séance du 1^{er} mars 1904.

Météorologie rétrospective. Nancy, 1854-1903.

La courbe de la marche annuelle moyenne de la température s'écarte notablement de la sinusoïde qui traduirait la variation du pouvoir calorifique du soleil en relation avec sa déclinaison.

Notre éminent confrère, M. Millot, l'a mis en relief dans une communication intéressante et documentée, publiée dans le *Bulletin de la Société des Sciences* sous le titre de « Marche annuelle normale de la température de l'air à Nancy¹. »

Il est, dans le calendrier, des jours destinés à être froids, d'autres à être chauds, comme, d'après une étude du même auteur sur la « Répartition de la pluie et des orages² », il en est où il doit pleuvoir et d'autres où il doit faire beau temps, sauf exception, bien entendu.

Certaines périodes, telles que celles des « Saints de glace » (du 10 au 13 mai), et celle qui suit d'ordinaire la Saint-Médard (8 juin), produisent dans la courbe des indentations caractéristiques, qui correspondent aux phénomènes météorologiques rappelés dans les dictons populaires.

Ces indentations s'atténuent lorsque, au lieu de descendre dans le détail des jours, on considère la moyenne d'une suite de jours, de cinq jours par exemple, comme certains météorologistes italiens qui ont imaginé de diviser l'année en 73 *pentades*; elles disparaissent complètement, si l'on comprend dans chaque moyenne la durée d'un mois, groupement communément adopté, bien que cette durée soit peut-être un peu longue pour donner une idée exacte et complète de la marche de la température.

La ligne brisée obtenue en portant les températures mensuelles normales comme ordonnées sur des abscisses égales entre elles et correspondant aux douze mois du calendrier traduit, tant bien que mal, pour l'année moyenne, cette marche ascendante et descendante.

Si l'on veut mettre en regard les deux éléments principaux du

1. Tome XII, fascicule XXVII, page 1.

2. *Ibid.*, p. 11.

climat, on peut figurer, au-dessus des températures et sur les mêmes lignes mensuelles, les chutes d'eau normales, et ceci en mesurant leur hauteur, non pas, comme d'usage, à partir du bas, mais à partir d'une ligne horizontale supérieure servant de zéro. Les précipitations atmosphériques prennent alors l'aspect d'une série de douches tombant parallèlement du ciel.

Pour inusité qu'il soit, ce procédé est expressif et commode. Il est surtout avantageux pour la représentation graphique, non plus de l'année moyenne, mais d'une suite d'années considérées une à une.

La figure représentant l'année moyenne est dyssymétrique par rapport à l'axe passant par le point culminant, c'est-à-dire par l'ordonnée de juillet, le mois le plus chaud¹. La seconde partie est sensiblement plus chaude que la première. La disparité s'accentuerait et arriverait à une proportion voisine de 5 à 7, si l'on comparait la somme de chaleur des six premiers mois du calendrier à celle des six derniers, au lieu de faire la coupure sur une ligne qui, en réalité, correspond au milieu, et non pas au commencement, du mois maximum, détachant ainsi une première

1. *Températures et hauteurs normales de pluie à Nancy, d'après la moyenne des années 1841-1890.*

Mois.	Température.	Chutes d'eau.
Janvier	0°50	53 ^{mm} ,17
Février	2 18	47 ,88
Mars	4 63	54 ,63
Avril	9 32	61 ,75
Mai	13 10	66 ,16
Juin	16 79	78 ,08
Juillet	18 38	83 ,28
Août	17 69	68 ,03
Septembre	14 28	59 ,82
Octobre	9 09	81 ,22
Novembre	4 48	74 ,40
Décembre	1 19	61 ,49
Année	9°30	789 ^{mm} ,91

Ces chiffres sont empruntés à l'étude de M. Ch. Millot, « Températures normales et quantités normales de pluie à Nancy », insérée au *Bulletin de la Commission météorologique de Meurthe-et-Moselle*. Nancy, 1891.

A l'aide de ces chiffres, il est aisé de construire le graphique de l'année moyenne à Nancy. En l'établissant sur calque à l'échelle adoptée pour la série 1854-1903, on peut avantageusement s'en servir, par superposition, comme terme de comparaison; pour la facilité, il est conseillé de faire passer un pointillé par les extrémités inférieures des lignes qui représentent les chutes d'eau mensuelles moyennes.

Les données numériques mises en œuvre ont été puisées dans la même étude et dans la suite du même bulletin.

demi-année du 16 janvier au 15 juillet, et une seconde du 16 juillet au 15 janvier.

Il n'y a pas lieu de discuter ici les causes, très connues, d'une dyssymétrie qu'il n'était pas inutile de signaler au passage.

Une année météorologique quelconque, représentée par les mêmes procédés, donne une figure plus ou moins éloignée de l'année normale et qui, la plupart du temps, n'en rappelle que de loin la forme générale.

Si l'on étend cette représentation à une série d'années, encore moins en découvre-t-on qui soient semblables entre elles. Le maximum et le minimum de la température se déplacent, les moyennes mensuelles diffèrent, et les chutes d'eau plus encore. Sur le total des précipitations atmosphériques d'une année, des différences de 25 ou de 30 p. 100 avec la chute d'eau normale ne sont pas inouïes. Il arrive aussi qu'un mois tout entier soit privé d'eau, ou que la chute s'élève à tout près du triple de la normale du mois (214 millimètres, contre 78, en juin 1886).

A toute première vue, on remarque que les hivers sont bien plus dissemblables que les étés. Quelquefois ils se présentent, comme l'hiver normal, à la façon d'une coupure plus ou moins profonde séparant deux sommets voisins. D'autres fois, c'est une rigole à fond plat, un cañon, pour employer une expression moins prosaïque, lorsque deux mois également froids viennent à se succéder, ainsi qu'il en a été en décembre 1865-janvier 1866, et en janvier-février 1896.

Très fréquemment, le pied des pentes offre des ressauts, des ruptures, et tel a été le cas pour 17 des 51 hivers qui encadrent les cinquante années 1854 à 1903, soit exactement le tiers. Le plus accidenté de tous est l'hiver 1868-1869.

Les étés sont moins tourmentés sans doute. Leurs formes ne sont toutefois régulières qu'exceptionnellement. Certains d'entre eux (1870, 1881, 1887 et 1901) présentent celle d'un beau pic, s'élevant d'une venue à son point culminant, situé sur l'ordonnée de juillet.

Sur les cinquante étés, 29 ont, comme il est normal, leur maximum en juillet, 15 en août, et 6 seulement en juin.

Les six maximums de l'année survenus en juin sont en excès sur la normale du mois, et même sur celle de juillet; trois d'entre

eux (1858, 1888 et 1889) sont suivis de mois de juillet et d'août inférieurs à la normale, et appartiennent à des années froides ; un quatrième, juin 1866, est suivi d'un juillet chaud, mais d'un août froid et pluvieux, et dépend d'une année exceptionnellement arrosée ; un cinquième, juin 1877, appartient encore à une année franchement humide ; les mois de juillet et d'août de la sixième de ces années (1897), bien que supérieurs à leurs normales respectives, ont reçu un notable excès d'eau.

On doit donc voir, dans le déplacement vers l'avant du maximum de l'année, un fait exceptionnel, et se rattachant le plus ordinairement à une saison défavorable.

On n'en saurait dire autant, d'une façon générale tout au moins, du déplacement du maximum dans le sens opposé, c'est-à-dire jusqu'au mois d'août, terme qui ne semble pas devoir être dépassé.

Sur quinze maximums annuels observés en août, trois sont inférieurs à la normale du mois : 1860, année très froide, la plus froide de la série ; 1861, été froid, et 1883, année où une chute d'eau double environ de la normale a abaissé de tout près d'un degré la température de juillet.

Six autres de ces déplacements, en 1856, 1863, 1875, 1879, 1890 et 1893, se rattachent encore à un mois de juillet plus ou moins inférieur à la normale, août étant supérieur à la sienne propre.

Pour six enfin, il s'agit d'étés chauds (1855, 1867, 1878, 1892, 1893 et 1899), dans lesquels la température de juillet, supérieure à la normale de ce mois, a été dépassée par celle du mois suivant.

Les déplacements du minimum hivernal sont beaucoup plus nombreux, en raison de la fréquente irrégularité de cette saison ; ils sont aussi plus étendus. Sur les 51 hivers relevés, 23 seulement ont leur minimum à sa place normale, et encore, pour deux d'entre eux, décembre ou février s'abaissent-ils jusqu'à l'égalité avec janvier.

Les 28 autres minimums tombent : 1 en novembre ; 13 en décembre ; 12 en février et 2 en mars.

Le minimum observé en novembre 1858 a été le début d'un hiver inférieur, dans son ensemble, à la température normale.

Les minimums observés en décembre ne semblent pas comporter d'observations. Entre les deux mois les plus froids de l'hiver, et dont les normales diffèrent de si peu (moins de 0°,7), il est na-

turel que des interversions soient fréquentes. Il est sans importance, d'ailleurs, que le minimum soit déplacé en une saison où la végétation est complètement inactive.

Un minimum se plaçant en février peut avoir des conséquences sensibles, surtout s'il est bas, et s'il est accompagné de fortes chutes de neige. Il est alors à craindre qu'il n'en résulte un dégel tardif et s'effectuant sous une insolation déjà prononcée, fait préjudiciable à la végétation. On ne saurait toutefois rien en augurer relativement à la température des mois qui suivent : février 1860 et février 1865 ont marqué le minimum de deux années aussi différentes qu'il est possible.

Les minimums tardifs survenus en mars 1877 (+ 3°,62) et en mars 1883 (+ 1°,58) ont fait suite à des hivers dissemblables, et se trouvent avoir précédé des étés analogues. Ils n'ont évidemment pas plus réagi sur la vie physiologique que d'autres froids tardifs, que des périodes d'aussi basse température qui, en même saison, ne se sont pas trouvées déterminer le minimum : tel mars 1887 (+ 2°,01) prolongeant au delà des limites habituelles un hiver rigoureux.

Dans le langage vulgaire, au moindre retour de froid succédant à une période de temps doux, ou réciproquement, on dit volontiers que « les saisons sont renversées » ou que « la température marche à rebours ».

Pour que les moyennes mensuelles accusent un de ces retours en sens inverse de la marche normale, pour que la représentation graphique les marque par une rupture, il faut qu'ils aient une certaine intensité et une certaine durée.

En fait, les hivers étant, comme il a été dit plus haut, d'allure moins régulière que les étés, et les moyennes de novembre à mars inclus ne différant pas de sensiblement plus de 4°, les ressauts, les ruptures dans l'allure de la courbe, s'y rencontrent plus fréquemment.

L'examen des cinquante années considérées révèle, tout à fait indépendamment des déplacements du maximum et du minimum, 32 ruptures de ce genre : 8 pour janvier seul, ce mois devenant supérieur à décembre et à février, et 5 pour février, plus chaud alors que janvier et que mars ; une fois (1903) avril est inférieur à mars, et mai l'est trois fois (1866, 1894, 1902) à avril ; quatre

fois juin est plus froid que mai et que juillet ; deux fois c'est juillet qui fléchit — profondément en 1879, légèrement en 1888 — entre juin et août ; en 1858, juillet et août tombent tous les deux au-dessous de juin et de septembre ; en 1865, au cours d'un été exceptionnellement chaud, juillet et septembre dépassent août ; en 1831, c'est novembre qui déborde octobre ; cinq fois décembre est supérieur à novembre et à janvier ; une fois enfin, en 1876-1877, les trois mois consécutifs de décembre, de janvier et de février forment un plateau qui, en plein hiver, domine novembre et mars.

Il est naturel que les ruptures soient rares dans les périodes au cours desquelles il se produit normalement une forte modification de la température. Une seule rupture en avril, aucune en octobre, ou du moins un mois d'octobre quelconque ne s'est-il jamais montré supérieur au mois de septembre qui l'avait précédé : la différence normale de septembre à octobre ($5^{\circ}, 19$) est la plus grande de l'année, la plus difficile donc à racheter.

Il ne faut pas croire toutefois que, nécessairement et de sa nature, la température moyenne d'octobre dépasse celle de septembre : octobre 1855 a atteint celle de $12^{\circ}, 60$ et octobre 1875 celle de $12^{\circ}, 31$, dépassant les mois de septembre 1887 ($11^{\circ}, 55$), 1861 ($10^{\circ}, 99$) et 1860 ($10^{\circ}, 10$). Mais les anomalies respectives de ces divers mois ne se sont pas manifestées dans le même millésime.

Plusieurs de ces retours en arrière ont exercé une action désastreuse sur les produits de la terre ; bien d'autres encore sans doute ! en dehors même des simples gelées de printemps, mais la durée de ces retours a été insuffisante pour rompre l'allure de la courbe des moyennes mensuelles de l'année.

Par contre, il est indubitable que le mois de novembre sec et chaud de 1881, dépassant de $1^{\circ}, 68$ le mois d'octobre, a sauvé les semailles d'automne faites dans de déplorables conditions : l'année 1882 a fourni l'une des plus belles, sinon la plus belle, des récoltes de blé dans notre département. Ainsi en a-t-il dû être d'autres fois encore.

La plupart des ruptures se rattachent à des anomalies dans la répartition des précipitations atmosphériques. La pluie réchauffe les mois d'hiver, elle refroidit les mois d'été ; sur la température des mois de transition, tels que mars, octobre et novembre, elle produit des effets différents suivant la nature de la période en

cours au moment où elle intervient. Elle met fin à un régime du Nord-Est et fait monter le thermomètre, comme elle interrompt un printemps calme qui commence à se réchauffer, ou bien elle abrège les derniers beaux jours et marque la fin de l'été de la Saint-Martin, comme elle peut, tout aussi bien, retarder le début du régime des gelées.

Le contraste, d'un mois d'hiver à l'autre, entre un temps clair et un ciel brumeux ou couvert, est quelquefois aussi la cause d'une rupture de la courbe. Les brouillards interceptent le rayonnement nocturne, alors généralement prépondérant, tout aussi bien que la chaleur solaire, qui se fait déjà sentir en février et en mars.

Il est aussi des ruptures dont la cause est dans le régime des vents, tout à fait indépendamment des chutes d'eau. Les vents à composante Sud nous apportent près des $5/7$ de la pluie que nous recevons, mais ils ne sont pas toujours pluvieux : 49 p. 100 même — la moitié donc — des jours où souffle le vent de Sud-Ouest sont sans pluie, souvent même beaux, si la dépression qui attire ce vent est faible ou éloignée.

Les antagonistes, c'est-à-dire les vents à composante Nord, qui refroidissent toujours la température — et qui sont les auteurs des ruptures de mai 1894 et de juin 1884 — amènent parfois aussi la pluie avec eux. Ils fournissent même le $1/8$ de la chute d'eau annuelle.

Il serait assurément intéressant de relever l'action combinée de la température et de la pluie sur la végétation, et en particulier sur les diverses productions agricoles.

Ce serait là singulièrement sortir du cadre de simple introduction à l'examen de représentations graphiques où doivent demeurer ces lignes.

Les conditions météorologiques favorables ou défavorables ne sont d'ailleurs pas les mêmes, pour les fourrages, par exemple, pour les céréales et pour les vins.

Disons seulement qu'à ce point de vue l'énoncé de la température moyenne et celui de la chute d'eau totale d'une année ne sont pas, par eux-mêmes, caractéristiques. Dans cette moyenne et dans ce total rentrent en effet des mois d'hiver, dont l'action sur la végétation est à peu près nulle, à part certains dégâts relativement rares.

Le nombre des mois chauds, de ceux dont la température moyenne dépasse, par exemple, 15°, a déjà plus de valeur que le chiffre énonçant la température moyenne de l'année. Ce nombre de mois relativement chauds, qui est de trois pour l'année moyenne, peut tomber à zéro, comme en 1860, ou à un seulement, comme en 1861 ; il s'élève fréquemment à quatre ; il a même été cinq fois de cinq, en 1862, 1865, 1868, 1890 et en 1892.

Comparée aux lignes qui, au-dessus, traduisent les chutes d'eau correspondantes, la forme graphique d'une année quelconque, permet d'en apprécier les caractères météorologiques plus rapidement et plus aisément que des colonnes ou des alignements de chiffres. Elle en donne ainsi, et à première vue, la physionomie, si l'on peut s'exprimer de la sorte.

L'établissement des tableaux graphiques présentés a eu pour but de faciliter cette appréciation pour la suite des cinquante années qui y sont comprises.

Séance du 15 avril 1904.

Faculté d'imbibition de la couverture morte du sol des forêts, par M. E. HENRY.

Le sol des forêts présente toujours à sa surface une couche plus ou moins épaisse de feuilles mortes et autres débris organiques tombant de la cime des arbres à l'automne et que les forestiers appellent la couverture morte. Son rôle est très important, aussi bien au point de vue chimique — c'est le seul engrais que reçoive la forêt — qu'au point de vue physique dont nous n'envisagerons ici qu'un seul côté, la *faculté d'imbibition*.

On appelle ainsi le taux maximum d'eau que la couverture morte peut retenir. Elle est alors *saturée*. Si elle reçoit un nouvel apport d'eau, elle le cède lentement, goutte à goutte, par déplacement progressif, au sol qui a le temps de l'absorber et de s'imbiber pleinement, même sur de fortes pentes.

La détermination de cette faculté d'imbibition a un grand intérêt. Une fois connue, si l'on sait, à l'aide de pluviomètres convenablement disposés, quelle est la quantité d'eau reçue par un versant boisé lors d'une période de grandes pluies, on pourra

calculer le volume d'eau de ruissellement qui gagnera le thalweg dans le cas de terrains imperméables ou, dans le cas contraire, le volume d'eau qui imbibera le sol ou filtrera dans le sous-sol; on pourra prédire s'il y aura crue ou non et quelle sera son intensité; on acquerra aussi des données sur l'approvisionnement des nappes souterraines en sol boisé.

Malgré l'importance du sujet, on a fait encore peu de recherches dans ce sens. Les seules que nous possédions avant celles de M. Calas nous venaient d'Allemagne. Après avoir rempli un volume déterminé de feuillage séché à l'air et aussi tassé que possible, on prenait le poids du vase ainsi rempli, on versait le feuillage dans un sac qu'on plongeait dans l'eau et, après deux jours d'imbibition, on retirait le sac de l'eau, le laissait s'égoutter et on remplissait de ce feuillage saturé le vase qui était pesé à nouveau.

Voici les moyennes obtenues en Bavière.

Un mètre cube de matière séchée à l'air absorbe :

	D'après les forestiers bavarois.	D'après Wollny.	
Feuilles de hêtre	233	257	} p. 100 de son poids desséché à l'air.
Aiguilles d'épicéa	150	161	
Aiguilles de pin sylvestre	143	207	
Bruyère commune	131	»	
Fougère impériale	259	»	
Mousse	282	257	
Paille de seigle	274	304	

Ces nombres moyens n'ont rien d'absolu, l'absorption pouvant varier :

De 195 à 252 p. 100 pour le feuillage de hêtre;

De 128 à 190 p. 100 pour les aiguilles d'épicéa;

De 121 à 167 p. 100 pour celles de pin sylvestre,

Et de 237 à 334 p. 100 pour la mousse, d'après les déterminations des forestiers bavarois, suivant le degré de décomposition.

On peut faire à ce procédé, simple et commode il est vrai, plusieurs objections. Tout d'abord il est clair qu'on ne se trouve plus du tout placé dans les conditions de la nature. On opère sur des feuilles bouleversées, rapprochées d'une manière fortuite et quelconque qui ne présentent plus les rapports naturels, le gisement, la stratification, les interstices, capillaires ou non, qu'elles avaient *in situ* et qui doivent influencer sur l'imbibition.

En outre, on doit forcément laisser de côté dans le procédé suivi par les Allemands les débris les plus altérés, ceux qui sont presque à l'état d'humus, collés au sol, qu'on ne peut ratisser qu'incomplètement et qui ont justement le plus grand pouvoir absorbant.

Il semble bien préférable de déterminer la faculté d'imbibition de la couverture telle qu'elle existe sur le sol, sans altérer en rien les rapports de ses éléments. Les chiffres que l'on obtiendra seront l'expression de la réalité et ne donneront prise à aucune objection.

C'est M. Calas¹, garde général des forêts à Prades, qui eut le premier l'idée de déterminer ce taux sans déranger la couverture. « En l'absence de chiffres pour le chêne, dit M. Calas, nous avons voulu nous livrer à des expériences à cet égard et nous avons trouvé des chiffres présentant des écarts considérables avec ceux des forestiers bavaïois, centralisés par Ebermayer. Ainsi, d'après nous, le chêne absorberait neuf fois son poids, tandis que le hêtre et le pin absorberaient respectivement huit et cinq fois leur poids d'eau. Comme les chiffres cités par nous sont le résultat moyen d'expériences tentées à plusieurs reprises et que les écarts entre les chiffres obtenus ont été très faibles, nous avons tenu à nous rendre compte du motif de la grande différence existant entre nos chiffres et ceux d'Ebermayer. Nous croyons que l'explication peut être trouvée dans la façon différente de procéder..... Nous nous sommes attaché à prendre la couverture telle qu'elle existe sur le sol. Ayant ramassé *tout le volume possible* sur 1 mètre carré de terrain et l'ayant conservé dans le même état, nous lui avons fait absorber toute l'eau qu'il a pu retenir et l'avons ensuite pesé. Puis ayant laissé l'évaporation se produire à l'air libre, la couverture complètement séchée a été pesée une seconde fois. Nous avons trouvé alors les chiffres cités ci-dessus. Sans vouloir opposer nos expériences à celles d'Ebermayer, nous croyons cependant que, dans les conditions où elles ont été exécutées, elles méritent de fixer l'attention et qu'elles donnent, au moins pour la

1. Voir sa *Notice sur les travaux de restauration de terrains en montagne entrepris par l'administration forestière dans le bassin de la Têt*. Perpignan, 1892, p. 36.

— Cet agent distingué, qui s'était déjà signalé par d'importants travaux et des publications fort intéressantes, est mort en 1901 à la fleur de l'âge, à la suite d'un accident d'automobile.

région des Pyrénées-Orientales, des renseignements utiles. Nous nous sommes, en effet, autant que possible maintenu dans les conditions de la nature et nous pensons que la couverture du sol devra encore fixer plus d'eau en place que dans les récipients où il nous a fallu la placer. »

Convaincu que le procédé employé par M. Galas est le meilleur, j'ai fait, dans le but de vérifier ses résultats et d'avoir quelques chiffres se rapportant aux forêts lorraines, quelques déterminations dont je viens rendre compte à la Société.

1. Aiguilles d'épicéa.

La première a trait à la couverture morte d'aiguilles d'épicéa qui, sous forme d'un tapis continu bien feutré de 2 centimètres environ d'épaisseur, recouvre le sol d'une plantation des environs de Nancy¹. Ces épicéas ont une cinquantaine d'années et forment un massif serré.

En février 1904, toute la couverture, avec quelque peu de la terre sous-jacente, a été récoltée à l'aide d'une sorte de pelle à main à bord tranchant sur des carrés de 0^m,50 sur 0^m,50 en trois places voisines pour avoir à peu près la moyenne du peuplement. On prit toutes les précautions pour ne rien laisser de la couverture sur le sol et pour la transporter au laboratoire sans en déranger la moindre parcelle. Là elle fut plongée dans l'eau pendant plusieurs jours jusqu'à complète imbibition; après qu'on l'eut laissée s'égoutter, on la pesa saturée, puis on la dessécha à 100° pour la peser à nouveau.

100 grammes de couverture séchée à 100° ont absorbé :

1 ^{er} lot	436 gr. d'eau.
2 ^e lot.	413 —
3 ^e lot.	396 —
Moyenne.	415 gr. d'eau.

Ainsi ce tapis d'aiguilles d'épicéa laissées *in situ* et comprenant des feuilles à tous les degrés de décomposition absorbe en moyenne

1. Plantation faite en partie par les élèves de l'École forestière, vers 1850, sur l'emplacement d'anciennes carrières, au-dessus du village de Dommartemont, près Nancy. Le sol est franchement calcaire; la terre qui se trouve immédiatement au-dessous de la couverture fait une vive effervescence avec les acides.

plus de quatre fois son poids d'eau (il s'agit du poids à 100°), tandis que par le procédé suivi en Allemagne on obtient un chiffre inférieur de plus de moitié, 172 p. 100 au lieu de 415. Et l'on ne peut nier que la quantité d'eau trouvée (415 grammes) ne soit bien réellement celle qu'absorberait la couverture, puisque celle-ci a été imbibée sur place.

J'ai repris une portion de cette couverture desséchée à 100° pour déterminer sa faculté d'imbibition par le procédé usité en Allemagne. Le sac renfermant les feuilles a été plongé dans l'eau pendant deux jours. On a obtenu le même résultat qu'en laissant la couverture en place.

100 grammes d'aiguilles à 100° ont absorbé 415 grammes d'eau.

L'altération des rapports réciproques des éléments de la couverture ne semble donc pas jouer un grand rôle, et l'explication des différences si importantes entre les chiffres allemands et ceux de M. Calas doit être cherchée ailleurs.

Pour voir dans quelle mesure influe sur l'imbibition de la couverture l'état de décomposition des feuilles, j'ai recueilli à part, dans la plantation de Dommartemont, le 2 avril 1904, les aiguilles superficielles, isolées, non feutrées par du mycélium et, aussi à part, le reste de la couverture composée de détritus plus altérés cohérents en une sorte de feutre grâce aux filaments mycéliens qui les parcourent en tous sens.

Voici les résultats obtenus pour la faculté d'imbibition soit de la partie superficielle, soit de la couche inférieure de la couverture :

100 grammes d'aiguilles et ramilles superficielles desséchées à 100° absorbent 214 grammes d'eau¹ ;

100 grammes de la couche inférieure de la couverture, formant plus des deux tiers de l'épaisseur totale, ont absorbé, dans un cas, 534 grammes d'eau et, sur un autre lot, 627 grammes d'eau, soit plus du double de ce que peut retenir la couverture superficielle.

Les différences constatées tiennent donc à ce que les forestiers allemands n'ont fait leurs déterminations que sur des aiguilles à peine décomposées.

1. Ebermayer donne le chiffre de 150,3 p. 100 (V. *Die Lehre der Waldstreu*. Berlin, 1876, p. 177), ce qui correspond à 177 p. 100 pour des aiguilles desséchées à 100°, nombre assez voisin de celui que j'ai obtenu.

Structure de la couverture. — Son épaisseur est d'environ 2 centimètres. La surface est couverte d'aiguilles libres non décomposées, présentant seulement quelques taches noires qui sont des fructifications d'ascomycètes saprophytes. Au-dessous de cette mince couche d'aiguilles nullement feutrée, vient une couche beaucoup plus épaisse formant au moins les $\frac{4}{5}$ de l'ensemble, et dont les éléments (aiguilles, ramilles, écailles) sont réunis par des filaments mycéliens, quelquefois blancs, mais généralement bruns ou noirs et de calibre très variable; les uns (du type *Cladosporium*¹) sont plus gros, à paroi épaisse et résistante, à cloisons nombreuses, présentant souvent des changements brusques de direction; les autres ont une épaisseur bien moindre avec paroi très mince. Tous ces hyphes s'entrelacent autour des aiguilles, les tissent pour ainsi dire et font de la couverture un feutre qui se soulève d'une pièce. Plus on se rapproche de la face inférieure, plus les éléments sont désorganisés, noirs, réduits en grumeaux, mais toujours réunis par des filaments du type *Cladosporium*. Au-dessous, sans transition, la terre ocreuse, assez compacte, *dépourvue de vers de terre*. A cette couverture d'aiguilles se mélangent par places, surtout sur les pierres affleurant le sol, des plaques de mousses (hynpnacées).

A quelques pas de là se trouvent des points où le massif est moins dense, formé de feuillus, de buissons de hêtres, chênes; l'état superficiel du sol change brusquement; çà et là des touffes d'herbes, la couverture n'est formée que d'une couche très mince, non feutrée, de feuilles de chêne, hêtre et autres feuillus, où les mycéliums sont très rares; la superficie de la terre végétale, de même teinte que sous l'humus brut précédent, se montre en grumeaux séparés par des interstices où peuvent circuler facilement l'air, l'eau, les racines. On y voit *toujours* soit des vers de terre, soit leurs déjections, ainsi que des insectes, des myriapodes, des cloportes. A la surface s'entre-croisent et s'enracinent de nombreuses tiges rampantes de lierre, de pervenche, de fraisier, de ronce, et on voit germer les plantes qui vont former le tapis végétal de la saison. Le sol est beaucoup plus meuble que sous les deux centimètres de la couverture feutrée, serrée, d'aiguilles d'épicéa.

1. D'après divers auteurs, ces *Cladosporium* sont caractéristiques des humus bruts ou imparfaits (les *Rohhumus* des Allemands); on les rencontre dans toutes les sortes d'humus bruts.

Poids de la couverture à l'hectare. — Les déterminations du poids à l'hectare de la couverture totale sous les épicéas de Dom-martemont, faites dans trois places d'essai voisines, ont fourni les chiffres suivants : 28 760 kilogr., 27 272 kilogr. et 34 480 kilogr., soit en moyenne, par hectare, 30 170 kilogr. de couverture desséchée à 100°.

Ce chiffre énorme est plus que double de ceux qui ont été trouvés en Allemagne¹ et montre bien que la décomposition normale (*Térémacausis*), celle qui donne l'humus doux, le terreau forestier, n'a plus lieu; c'est une décomposition plus lente, produisant de l'humus imparfait à réaction acide, qui intervient ici.

Étant donné que 100 kilogr. de cette couverture absorbent et retiennent 415 kilogr. d'eau, les 30 tonnes qui représentent son poids à l'hectare absorberaient 124 tonnes d'eau, soit une hauteur de pluie de 12,4 millimètres.

Mais la couverture supposée complètement desséchée à l'air contient encore environ 15 p. 100 d'eau, soit 18 675 kilogr. par hectare qui, retranchés de 124 500 donnent 105 825 kilogr. Telle est la quantité d'eau que peut retenir l'hectare de couverture desséchée à l'air libre autant que possible : ce chiffre correspond à une lame d'eau de 10,5 millimètres.

Comme il est prouvé que les massifs d'épicéa retiennent et évaporent sur leurs cimes environ la moitié de l'eau des pluies, il faudrait une série de pluies fournissant une lame d'eau de 21 millimètres, pour que le sol sous cette épaisse couverture de 2 centimètres commençât à s'humecter². Le 2 avril, après une série de jours pluvieux, ce sol pris immédiatement au-dessous de la couverture contenait 24 p. 100 d'eau, tandis qu'à 50 mètres de là le sol nu du plateau, soumis à une forte évaporation cependant, en renfermait à la surface 26,4 p. 100. Dans une tranche de sol de 1 décimètre d'épaisseur il y avait donc à ce moment environ 24 tonnes d'eau en plus sur le plateau que dans la forêt par hectare.

Les épicéas possèdent au plus haut degré trois caractères qui en font les arbres les plus propres à l'assainissement des régions où l'eau se trouve en excès. Avec son couvert très épais, avec son aptitude à croître en massif très serré, avec son lacs de racines

1. Voir EBERMAYER (*loc. cit.*), p. 51.

2. A Nancy, la tranche pluviale est d'environ 3 décimètres pour la première moitié de l'année (hiver et printemps) et de 5 décimètres pour la seconde.

traçantes absorbant avidement les eaux superficielles, l'épicéa, qui jouit en outre de la précieuse qualité de réussir très bien en plein découvert, soit par semis, soit par plantation, est l'arbre le mieux adapté au rôle d'*assécheur* du sol. C'est à lui que l'on s'adresse de préférence pour le boisement des terrains tourbeux et marécageux, des *fanges* de l'Ardenne comme des *feignes* des Vosges.

« En Belgique, les plateaux de 400 mètres à 670 mètres d'altitude où sont les Hautes-Fanges reçoivent 1 200 à 1 500 millimètres d'eau par an.

« La couche de tourbe qui repose sur une nappe imperméable d'argile provenant de la décomposition des schistes du Cambrien et du Dévonien inférieur mesure souvent 0^m,50, 1 mètre et jusqu'à 2 mètres.

« Qu'arrive-t-il après un orage ou une fonte subite des neiges ?

« L'eau atteignant rapidement un sous-sol imperméable est arrêtée, ne pénètre pas et aussitôt que la couche végétale est imprégnée elle descend et se précipite vers les dépressions, causant des crues violentes et subites.

« L'aspect et les allures des cours d'eau sortant des fanges sont connus. Un garde passant la Soor à pied le matin ne peut la traverser une heure après, au retour, s'il survient un orage.

« Mais une fois l'eau superficielle évacuée, il ne reste plus rien pour l'écoulement et presque subitement la fange ne donne plus; elle conserve son eau d'imbibition, reste humide; mais les ruisseaux qui en sortent tarissent ¹.

« Pendant l'hiver une autre circonstance aggrave ces effets désastreux au point de vue du régime des eaux. La surface étant gorgée d'eau, celle-ci se congèle par les grands froids, puis bientôt se recouvre de neige.

« Ici rien ne s'interpose entre les pluies et le soleil, d'une part, et la grande surface de neige, d'autre part. Aussi le dégel, la fonte des neiges se font-ils sentir brusquement, subitement.

« L'eau arrêtée par la glace reposant sur la fange s'écoule avec

1. On entend dire quelquefois que les tourbières sont des réservoirs d'eau et qu'à ce titre elles jouent un rôle utile. Ce serait vrai si l'on pouvait tourner à volonté le robinet du réservoir et en faire sortir en été, dans la saison des étiages, l'eau nécessaire aux besoins agricoles ou industriels. Mais il n'en est pas ainsi et les tourbières, nuisibles à tous les points de vue, doivent être combattues partout où on les rencontre, sauf dans le cas où elles sont exploitables comme combustibles.

une extrême rapidité, ce qui, à juste titre, fait redouter la fonte des neiges par les riverains des cours d'eau qui sortent des tourbières.

« Aussi les Belges ont-ils résolu de reboiser ces hautes fanges.

« Il faut d'abord les assainir et pour cela creuser des fossés qui occupent $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{6}$ du terrain. Une notable partie de l'eau tombe directement dans ces fossés et s'écoule très rapidement. Les bandes fournissent aussi une partie de l'eau qu'elles reçoivent. L'assainissement aura donc pour résultat d'augmenter la rapidité avec laquelle l'eau s'écoulera et d'aggraver ainsi l'influence des fanges sur le régime des eaux.

« Mais cette création de fossés d'assainissement doit toujours être suivie d'un boisement.

« Il y a à ce moment une période critique durant de quatre à six ans, variable suivant l'enherbement des fossés et le développement de la forêt.

« Le boisement agit de la manière la plus favorable sur les crues. La forêt fait écran, ralentit la chute, diminue la rapidité de l'arrivée de l'eau, de l'écoulement, retient par son terreau, absorbe par ses racines, empêche la fonte subite des neiges, rend le sol plus perméable.

« *A vingt ans, les fossés, jadis si actifs, ne donnent plus d'eau. Tout est retenu*¹. »

Il est bien connu que les résineux produisent autour d'eux une dépression dans le niveau de la tourbière. « Si, dans le champ d'un marais tourbeux, dit M. de Lapparent², il se trouve des arbres tels que des sapins, l'influence exercée par leur ombre se traduit par une dépression circulaire dont le pied de l'arbre occupe le centre et où l'on peut marcher à pied sec, tandis que, tout autour, le sol, quoique plus élevé est humide et tourbeux; singulier contraste, qui fait naître ainsi une sorte de cuvette sèche au milieu d'un bassin rempli d'eau. » Ce contraste s'explique tout naturellement, comme il vient d'être dit, par la diminution notable de la quantité de pluie qui arrive au sol et par l'absorption des racines.

1. Communication de M. Crahay, inspecteur des eaux et forêts de l'État belge. — Voir en outre les nombreux articles sur l'assainissement et le boisement des fanges insérés dans le *Bulletin de la Société centrale forestière de Belgique*.

2. *Traité de géologie*, par A. DE LAPPARENT. 3^e édit., 1893, p. 336.

2. Feuilles de hêtre.

La seconde détermination de la faculté d'imbibition de la couverture morte a été faite sur le type habituel que l'on rencontre — heureusement — dans la plupart des forêts françaises, type où la décomposition s'opère rapidement sous l'action de l'oxygène en donnant un faible résidu de *terreau neutre* ou *humus forestier*, et non plus sur une forme exceptionnelle comme celle du cas précédent.

Les échantillons ont été pris dans la forêt domaniale de Haye¹ (près Nancy), dont le sol, superficiel, repose sur les calcaires fissurés du médio-jurassique (étages bajocien et bathonien).

Après douze jours d'imbibition, la terre et les débris organiques laissés dans leur situation naturelle pèsent. 1^{kg},800
En déduisant le poids de la terre saturée qui est de 0,230
il reste pour le poids de la couverture saturée. 1^{kg},570

Cette couverture desséchée à 100° pèse 246 grammes.

Ces 246 grammes de matière organique absorbent donc 1 570 — 246 = 1 324 grammes d'eau, soit 538 p. 100 de son poids à 100°.

Pour comparer ce résultat à ceux des forestiers bavaois, il faut ramener le poids de la couverture à 100° à ce qu'elle pèse quand elle est complètement desséchée à l'air. A cet état, elle renferme encore 15 p. 100 d'eau et absorbe 441 p. 100 de son poids, tandis qu'Ebermayer indique 233 p. 100, presque moitié du taux trouvé par moi. Il est vrai que Calas donne un chiffre beaucoup plus fort; d'après ses déterminations faites dans les Pyrénées-Orientales, la couverture de hêtre absorberait huit fois son poids à l'air, tandis que nous trouvons 4,4 seulement pour la couverture de la forêt de Haye et qu'Ebermayer donne encore beaucoup moins (2,3) pour la moyenne des observations faites en Bavière.

Comme nous l'avons déjà fait observer pour les aiguilles d'épicéa, ces différences tiennent surtout à l'état de décomposition des feuilles. Plus est grande, dans une couverture quelconque, la

1. Cette couverture, prélevée dans la série de Remenaumont, tout près de la Haute-Borne, était formée essentiellement de feuilles mortes, de brindilles et d'involucres de hêtre. Le peuplement principal est formé surtout de hêtres avec quelques chênes et charmes.

proportion d'organes presque entièrement décomposés, plus est grande aussi la faculté d'imbibition.

Le poids à l'hectare de la couverture séchée à 100° atteindrait 9 840 kilogr. — En 1895, j'avais trouvé en des points voisins :

Parcelle F₂ (Remenaumont), 6 802 kilogr. ;

Parcelle E₂ (Remenaumont), 8 169 kilogr.

Il n'est certainement pas désirable de trouver sur le sol de la forêt des poids de couverture morte plus considérables. S'ils étaient dépassés, si la décomposition s'opérait encore plus lentement, elle donnerait lieu, comme dans le cas précédent, où la couverture d'aiguilles d'épicéa atteint 30 000 kilogr. à l'hectare, à de l'humus imparfait à réaction acide dont l'influence sur le sol est nuisible. Les meilleures conditions sont réalisées quand le sol de la forêt se couvre chaque année du plus possible de débris organiques, que ceux-ci se transforment le plus vite possible en humus qui s'incorpore le plus vite possible au sol pour servir à la nutrition des arbres et qu'il ne reste guère à la surface que des détritiques de l'année précédente, sous forme d'une couverture mince s'opposant à l'évaporation, mais permettant l'imbibition du sol. C'est ainsi, c'est quand l'éremacausis se fait énergiquement, que le sol forestier s'améliore le plus vite et le mieux.

En supposant la couverture de la forêt de Haye aussi sèche que possible, elle retiendrait — dans le point examiné — 52 939 kilogr. d'eau par hectare, soit une hauteur de pluie de 5,3 millimètres.

Sur certains mouvements déterminés par l'approche des corps vivants ou d'objets qui préalablement ont été mis en contact avec ces corps, par M. P. DUMONT⁽¹⁾.

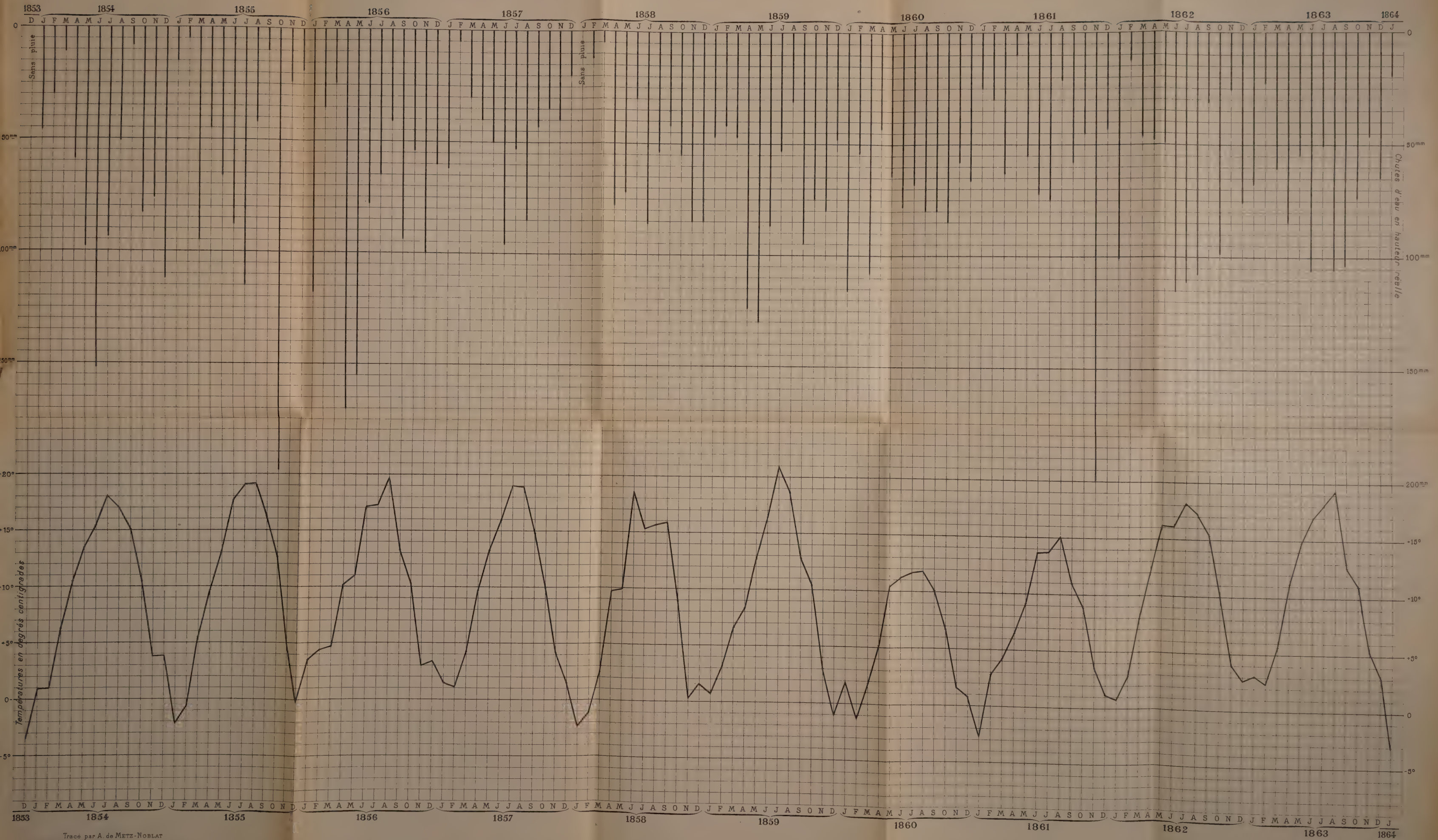
Au mois de décembre dernier, un correspondant de Paris, M. Guadet, ancien élève de l'École polytechnique, rappelait à M. Charpentier l'expérience attribuée à l'occultiste Allan Kardeck et qui consiste à faire tourner une aiguille de papier mince, de 5 à 7 centimètres de longueur, 5 millimètres de largeur, dont les extrémités, en forme de T, ont environ 1 centimètre de largeur. On fait reposer cette aiguille en équilibre sur la pointe

1. Communication faite à la Société des sciences de Nancy, le 16 mai 1904.

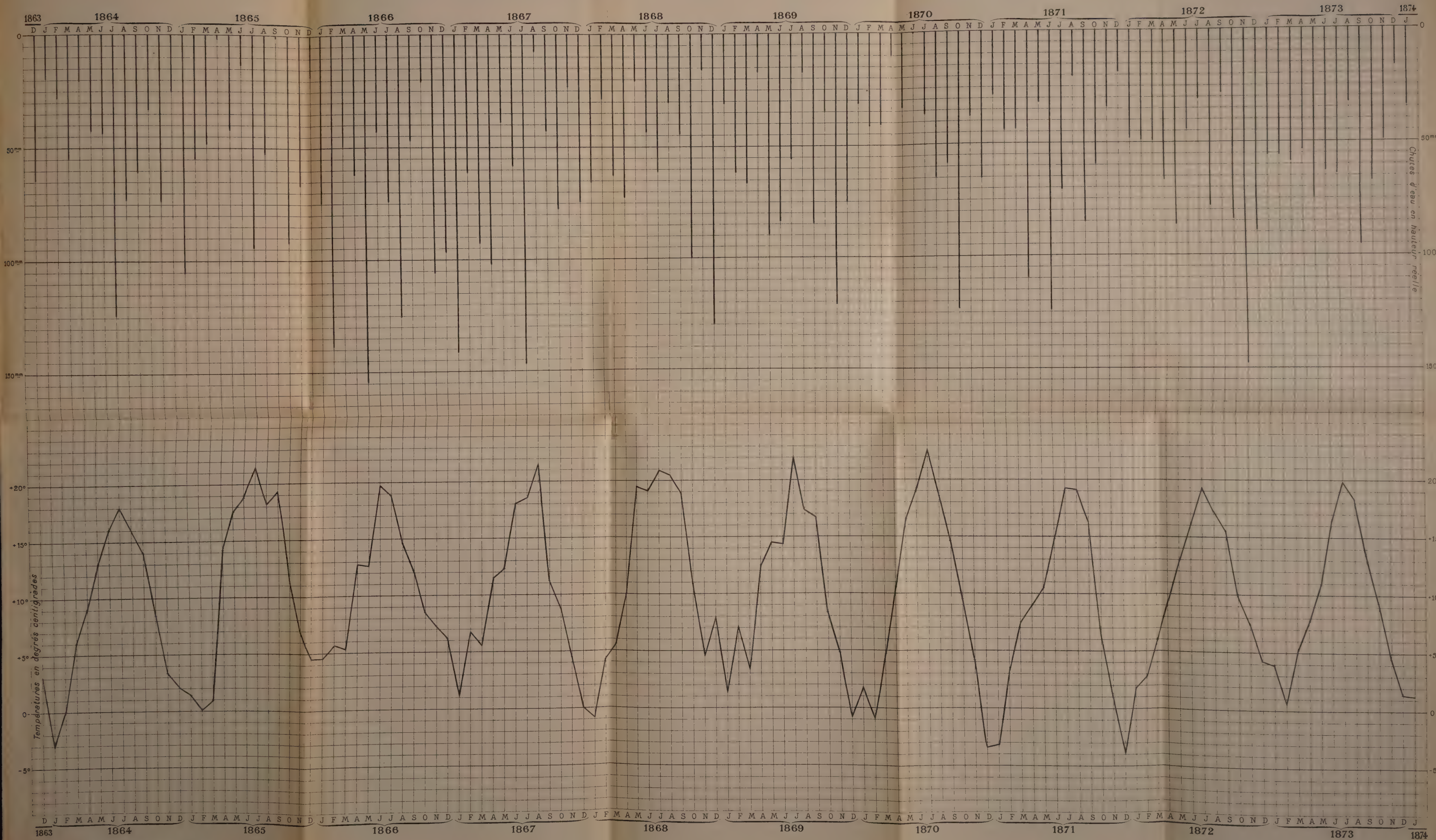
d'une aiguille de métal fixée verticalement dans un bouchon (un léger pli longitudinal et un transversal du papier facilitent cette disposition). Si on entoure le système par les deux mains disposées chacune en demi-cercle, de façon à ce que le pouce de l'une et le petit doigt de l'autre reposent sur la table, l'extrémité des doigts étant un peu fléchie, au bout de quelques instants, la rotation s'opère dans le sens d'un courant qui circulerait dans les bras, allant de l'épaule vers l'extrémité des doigts, et dépend, par conséquent, de la position respective des deux mains sur la table. Si celles-ci sont posées de façon que les extrémités digitales se rencontrent, le mouvement de rotation ne se produit pas ; il s'arrête ou est fortement ralenti, si une seconde personne approche de la partie externe d'une des mains de l'opérateur, l'extrémité de ses doigts réunis. L'expérience, bien entendu, doit être faite dans un lieu à l'abri de tout courant d'air. Elle réussit également, quoique plus lentement, si on interpose entre les mains et l'aiguille un cylindre de papier mince ou un verre à boire très mince. Une seule main peut à la rigueur mettre l'appareil en mouvement, et suffit pour faire continuer celui-ci, provoqué par l'application des deux mains. Deux opérateurs peuvent produire le même résultat en employant chacun une main. M. Guadet demandait si les rayons N émanant du système musculaire et nerveux n'étaient pas la cause du phénomène. M. Charpentier m'ayant fait part de cette communication, je variaï l'expérience que je connaissais déjà, en remplaçant l'aiguille de papier par des étoiles, des croix de Malte, des disques de papier mince et d'aluminium qui donnèrent les mêmes résultats. Un disque de papier à calquer, de 20 centimètres de diamètre, est facilement mis en rotation par l'approche de trois mains. J'eus ensuite l'idée de reproduire le phénomène en remplaçant les mains par des gants auxquels je donne à l'aide d'une armature de gros fils de cuivre la même disposition qu'aux mains dans l'expérience précédente. Des gants neufs ou n'ayant pas été portés depuis longtemps ne produisent aucun effet, même si on les remplit de sable porté à une température voisine de celle du corps humain. Si, au contraire, on introduit dans les gants les mains, pendant quelques minutes avant d'approcher ceux-ci de l'appareil, la rotation du mobile se produit et persiste pendant plusieurs heures, dans le même sens qu'avec les mains. On peut employer indifféremment des gants de peau ou

des gants de tissu ; ceux qui m'ont donné les meilleurs résultats sont de gros gants de laine fourrés et garnis de peau à la face palmaire. Si, au lieu d'introduire les mains dans les gants, on applique ceux-ci pendant quelque temps sur la surface des mains étendues, de façon que leurs poignets reposent sur les doigts de la main et leurs doigts sur les poignets, la rotation se produit encore à leur approche, mais dans un sens opposé au précédent. La température des mains ne semble avoir aucune influence sur ces expériences qui réussissent du reste si on les répète avec des animaux à sang froid, comme des grenouilles, que l'on peut disposer autour du mobile, soit deux à deux, les corps faisant un cercle l'un à la suite de l'autre, soit avec une seule grenouille en donnant à ses pattes antérieures la même direction qu'aux mains dans les cas précédents. La contraction musculaire des mains semble favoriser le mouvement de rotation du mobile.

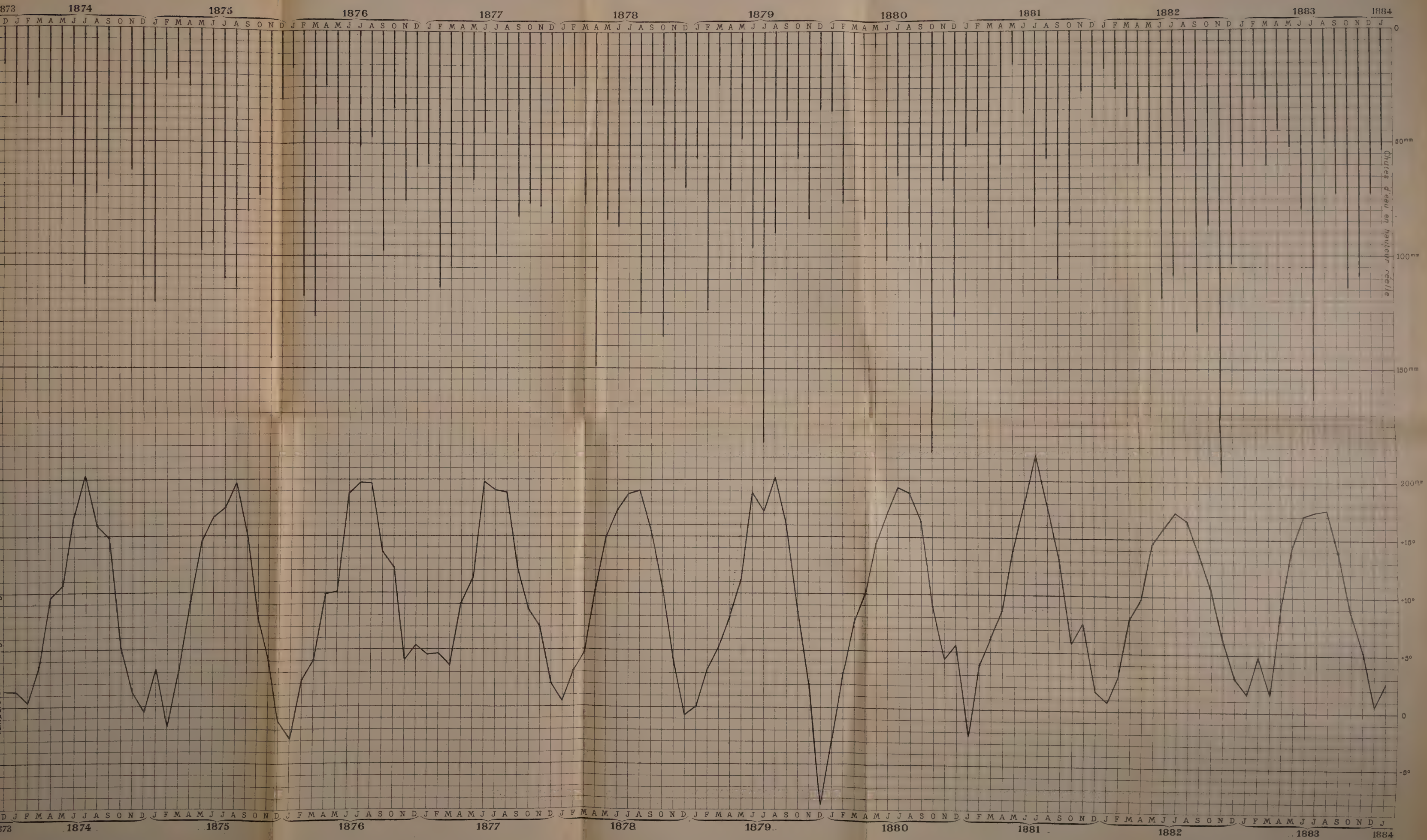
NANCY. TEMPÉRATURES MENSUELLES MOYENNES ET CHUTES D'EAU CORRESPONDANTES 1854-1863



NANCY. TEMPÉRATURES MENSUELLES MOYENNES ET CHUTES D'EAU CORRESPONDANTES 1864-1873



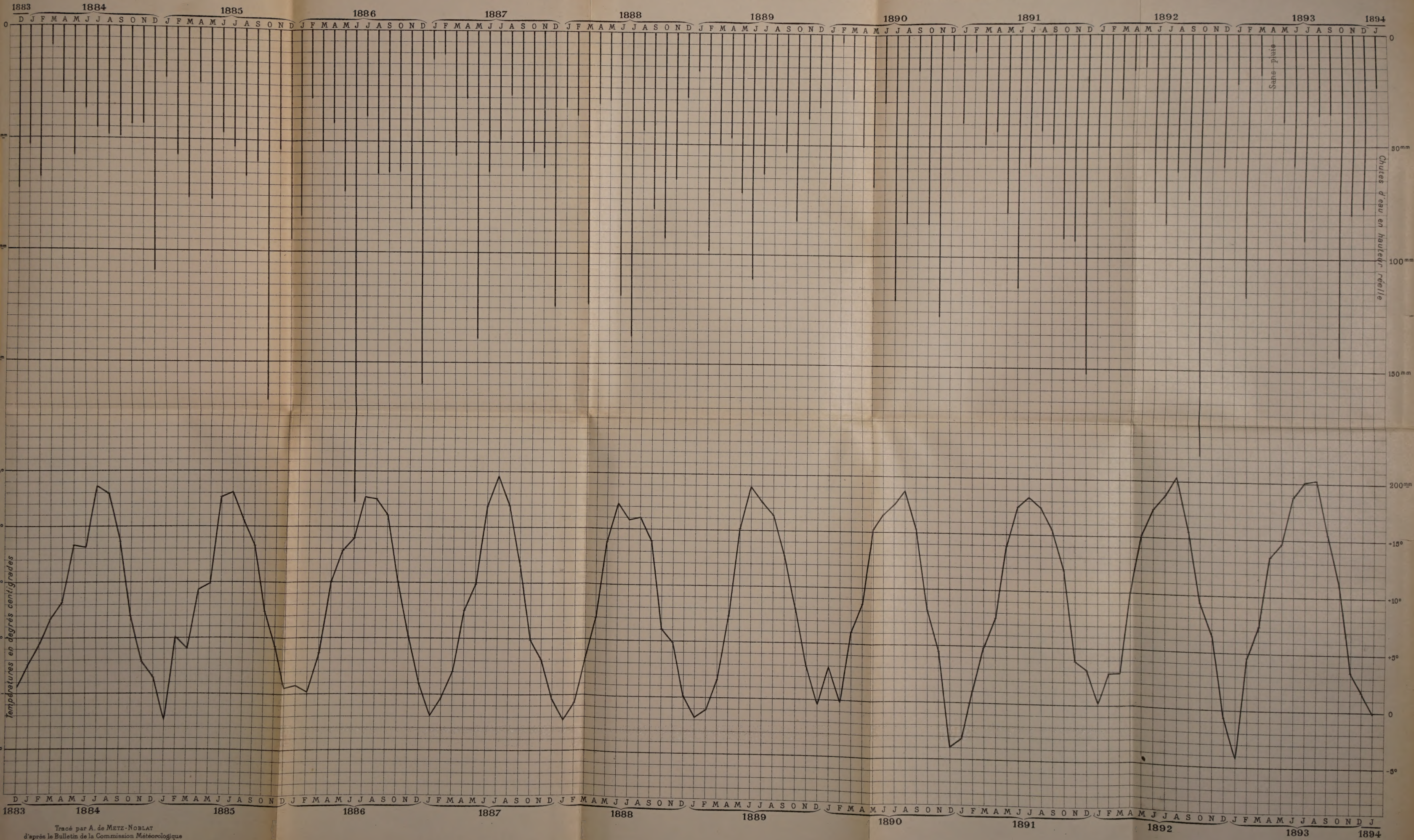
NANCY. TEMPÉRATURES MENSUELLES MOYENNES ET CHUTES D'EAU CORRESPONDANTES 1874-1883



Chutes d'eau en hauteur réelle



NANCY. TEMPÉRATURES MENSUELLES MOYENNES ET CHUTES D'EAU CORRESPONDANTES 1884-1893



Tracé par A. de METZ-NOBLAT
d'après le Bulletin de la Commission Météorologique
de Meurthe-et-Moselle.

NANCY. TEMPÉRATURES MENSUELLES MOYENNES ET CHUTES D'EAU CORRESPONDANTES _1894-1903

